Materiál byl vytvořen v rámci projektu

Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

OPERACE S VEKTORY

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VELIKOST VEKTORU,
POČETNÍ OPERACE S VEKTORY

Vektoru můžeme přisoudit velikost. S vektory také můžeme provádět početní operace, které jsme zvyklí provádět s čísly, tzn. že je možné je sčítat, odčítat a násobit konstantou. Všechny tyto operace lze realizovat graficky nebo početně (jsou - li vektory umístěny v soustavě souřadnic).

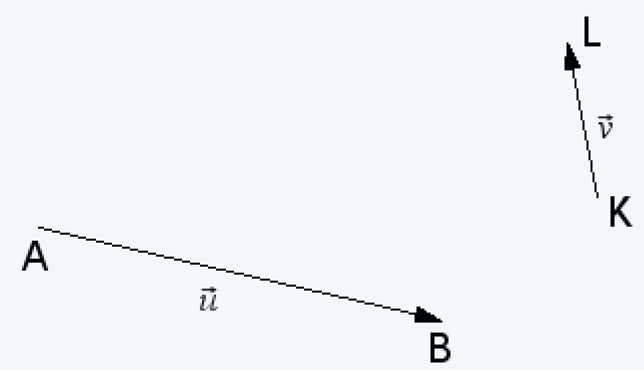
Velikost vektoru a početní operace s vektory - graficky

Protože jsou vektory abstraktní pojmy, provádíme veškeré operace s nimi prostřednictvím jejich umístění, tedy prostřednictvím orientovaných úseček. Předpokládejme tedy, že máme vektor $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Velikost vektoru $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ chápeme jako velikost jeho umístění, tedy jako vzdálenost bodů A a B. Velikost vektoru $\vec{u}$ značíme $|\vec{u}|$.

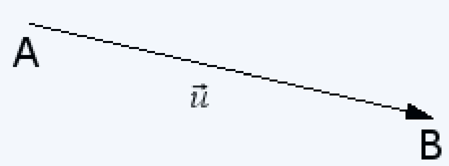
Součet vektorů: K vektoru $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ můžeme přičíst vektor $\vec{v}$ tak, že jej umístíme do bodu B (do koncového bodu prvního umístění). Označíme - li toto umístění vektoru $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, pak součet vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je dán umístěním $\overrightarrow{AC}$. Součet vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ značíme $\vec{u}+\vec{v}$.

Př.1 Graficky sečtěte vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ na obrázku.



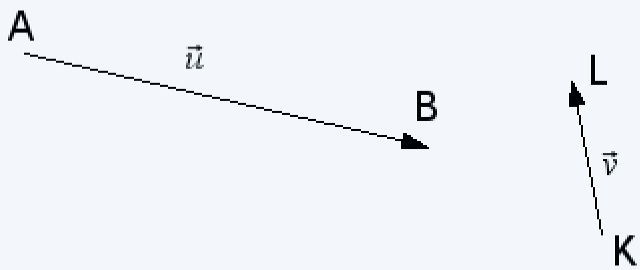
Opačný vektor k vektoru $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ je vektor s umístěním $\overrightarrow{BA}$. Opačný vektor k vektoru $\vec{u}$ značíme $-\vec{u}$.

Př.2 Zakreslete vektor opačný k vektoru $\vec{u}$ na obrázku.



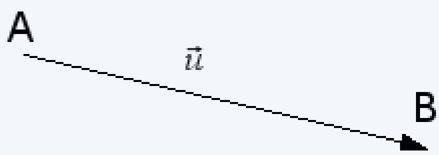
Rozdíl vektorů: Odečíst od vektoru $\vec{u}$ vektor $\vec{v}$ znamená k vektoru $\vec{u}$ přičíst vektor $-\vec{v}$.
Rozdíl vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ značíme $\vec{u}-\vec{v}$.

Př.3 Od vektoru $\vec{u}$ odečtěte vektor $\vec{v}$ na obrázku.

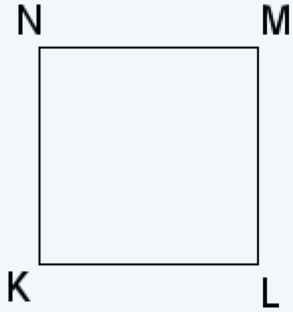


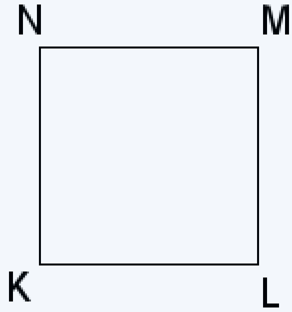
Násobek vektoru: Vektor $\vec{u}$ můžeme vynásobit číslem k. Výsledkem tohoto násobení je vektor, který je s vektorem $\vec{u}$ rovnoběžný a jehož velikost je $k\cdot|\vec{u}|$. Pro $k>\bullet$ má s vektorem $\vec{u}$ stejný směr, pro $k<\bullet$ stejný směr nemají. k - násobek vektoru $\vec{u}$ značíme $k\,\vec{u}$.
Pozn.: Je - li číslo $k=0$ je výsledkem násobení nulový vektor.

Př.4 Na obrázku je znázorněn vektor $\vec{u}$. Znázorněte vektory $3\,\vec{u}$ a $-\frac{1}{2}\vec{u}$.

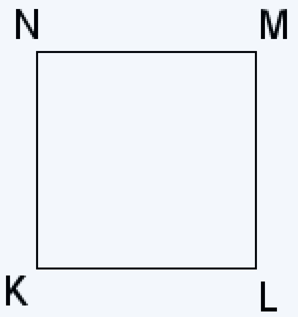


Př.5 Je dán čtverec *KLMN*. Určete
a) $\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{LM}$
b) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{NL}$

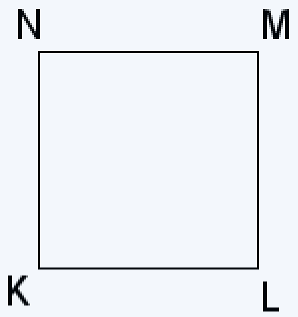




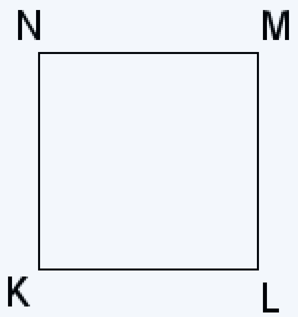
c) $\overrightarrow{LN}-\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{NK}$



d) $2\,\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MK}$



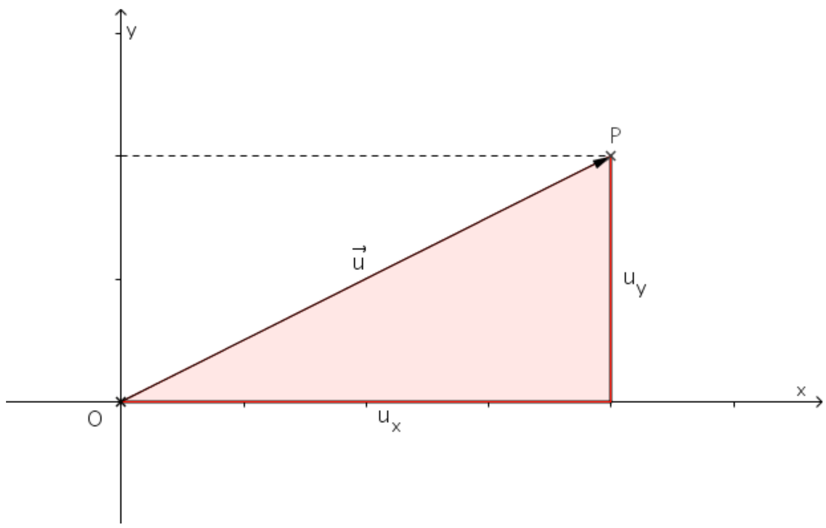
e) $\frac{١}{٢}\overrightarrow{LM}-\frac{١}{٢}\overrightarrow{KM}$



Velikost vektoru a početní operace s vektory - početně

Umístíme - li vektory do soustavy souřadnic, je možné každému z nich přisoudit souřadnice, jak jsme si ukázali v předchozí kapitole. Všechny výše uvedené operace s vektory pak lze provádět pomocí jejich souřadnic (aniž bychom je museli znázorňovat). Předpokládejme tedy, že máme vektor $\vec{u}=(u_x, u_y)$.

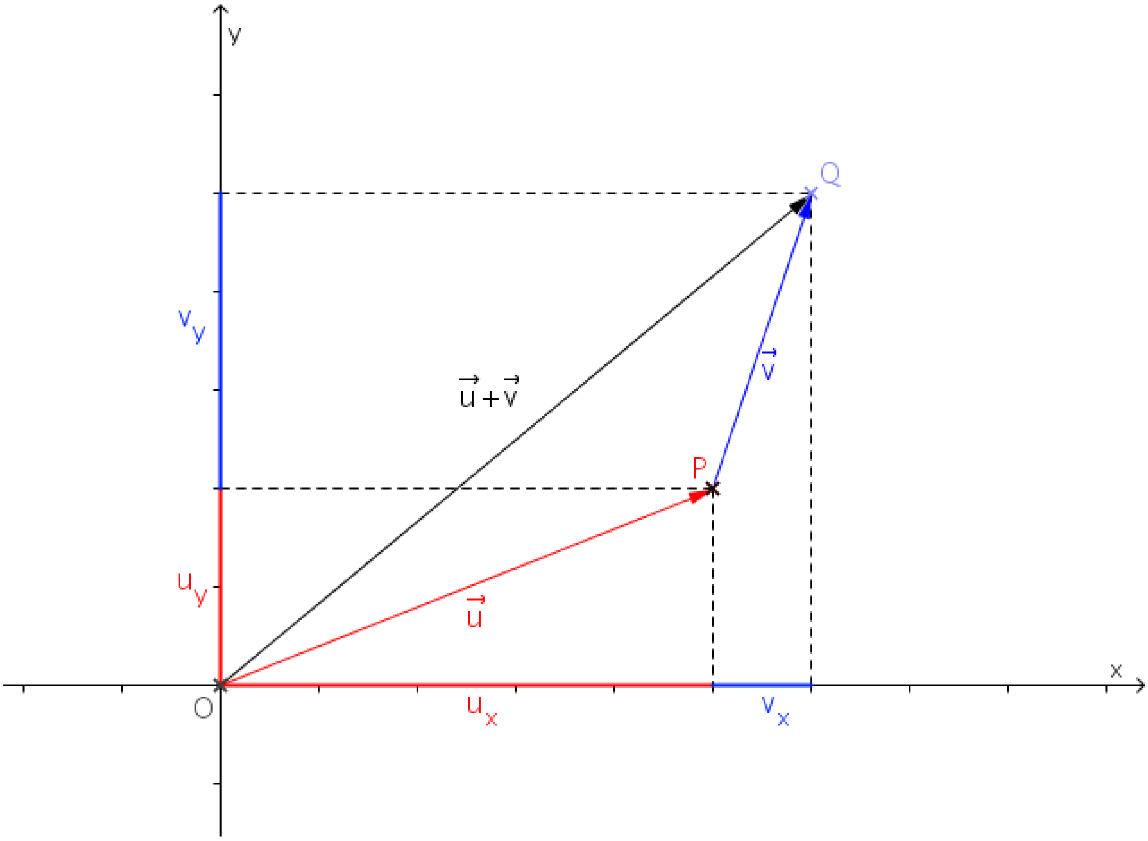
Velikost vektoru $\vec{u}=(u_x, u_y)$ chápeme jako velikost jeho umístění. Umístíme tedy vektor do počátku soustavy souřadnic, můžeme jeho velikost určit početně pomocí Pythagorovy věty.



Pro velikost vektoru $\vec{u}=(u_x, u_y)$ platí: $|\vec{u}|^2=u_x^2+u_y^2$, tedy

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2} \ .$$

Součet vektorů: Předpokládejme, že kromě vektoru $\vec{u}=(u_x, u_y)$ máme dále vektor $\vec{v}=(v_x, v_y)$, který chceme k vektoru $\vec{u}$ přičíst. Znamená to umístit jej do koncového bodu umístění vektoru $\vec{u}$. Součet máme proveden v soustavě souřadnic na spodním obrázku.



Vidíme, že souřadnice součtu získáme sečtením souřadnic jednotlivých vektorů.
Pro součet $\vec{u}+\vec{v}$ vektorů $\vec{u}=(u_x, u_y)$ a $\vec{v}=(v_x, v_y)$ tedy platí:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x, u_y+v_y) \ .$$

Vyjdeme - li z grafického řešení, můžeme obdobné vztahy odvodit i pro zbývající operace s vektory:

Opačný vektor: Pro souřadnice vektoru $-\vec{u}$ opačného k vektoru $\vec{u}=(u_x, u_y)$ platí:

$$-\vec{u}=(-u_x, -u_y)$$

Rozdíl vektorů: Pro rozdíl $\vec{u}-\vec{v}$ vektorů $\vec{u}=(u_x, u_y)$ a $\vec{v}=(v_x, v_y)$ platí:

$$\vec{u}-\vec{v}=(u_x-v_x, u_y-v_y) \ .$$

Násobek vektoru: Pro k-násobek vektoru $\vec{u}=(u_x, u_y)$ platí:

$$k\vec{u}=(k\cdot u_x, k\cdot u_y) \quad .$$

Jednoduše lze tedy říci, že veškeré operace s vektory lze provádět po souřadnicích. Dané vztahy přitom platí i v prostoru, kde je pouze rozšiřujeme o z-ovou souřadnici.

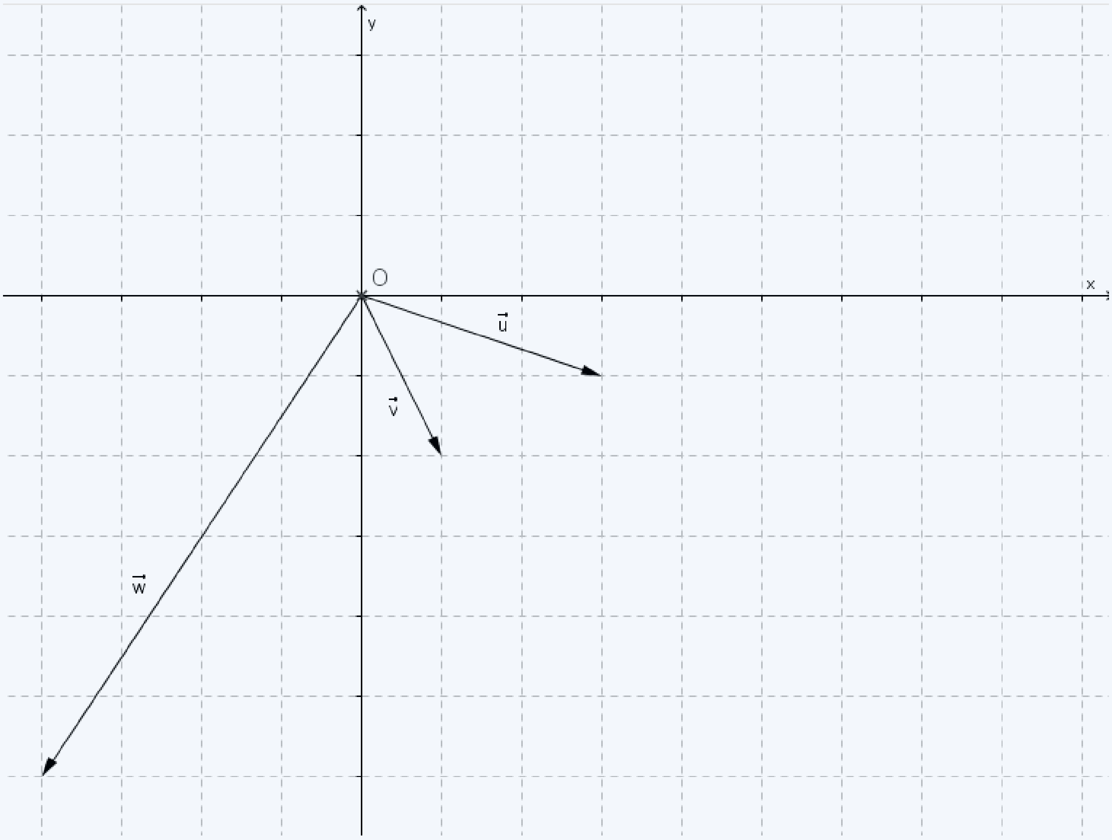
Př.6 Jsou dány vektory $\vec{u}=(3;-1), \vec{v}=(1;-2), \vec{w}=(-4;-6)$.

a) Určete jejich velikosti,

b) graficky i početně určete vektor $\vec{x}=2\vec{u}-\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$.

a)

b)

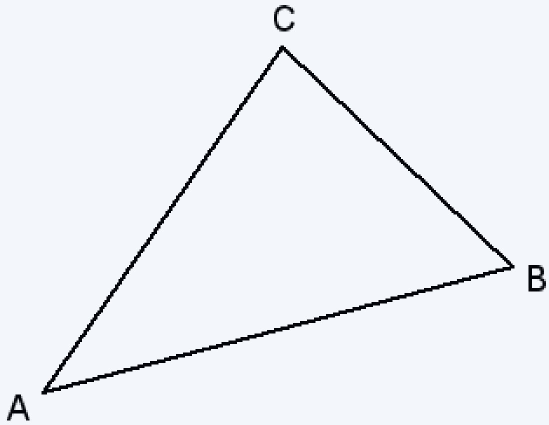


Př.7 Určete velikost vektoru $\vec{u}-\vec{v}$, jestliže $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{CD}, A[-3;1], B[3;1], C[4;-3], D[-5;2]$

Př.7 Jsou dány vektory $\vec{u}=(5;-3); \vec{v}=(1;v_y)$. Určete chybějící souřadnici vektoru $\vec{v}$ tak, aby délka vektoru $\vec{u}+\vec{v}$ byla $3\sqrt{5}$.

Př.8 Určete početně souřadnice těžiště T trojúhelníku ABC $A[-2;3], B[4;1], C[-3;-3]$.

Náčrt:



Řešení:

Př.9 Na základě řešení předchozího příkladu odvoďte obecný vztah pro výpočet souřadnic těžiště trojúhelníku pomocí souřadnic jeho vrcholů.