Materiál byl vytvořen v rámci projektu

Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

ÚHEL VEKTORŮ

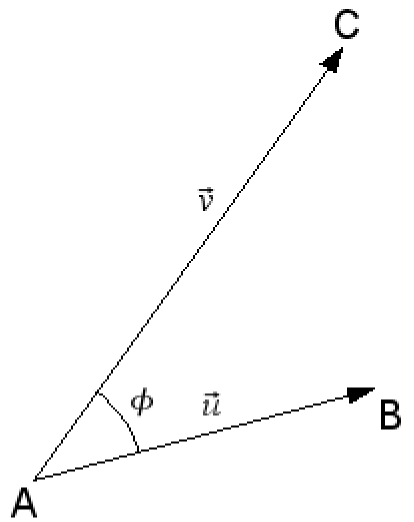
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ÚHEL VEKTORŮ, SKALÁRNÍ SOUČIN

V úvodu kapitoly o vektorech jsme uvedli, že fyzikální veličiny se dělí na skalární a vektorové. U vektorových veličin je kromě velikosti důležitý i jejich směr. Význam směru vektorových veličin se projevuje zejména v případech, kdy v rámci výpočtu dvě vektorové veličiny násobíme. Jejich vzájemný směr můžeme vyjádřit pomocí úhlu, který svírají.

Úhel vektorů

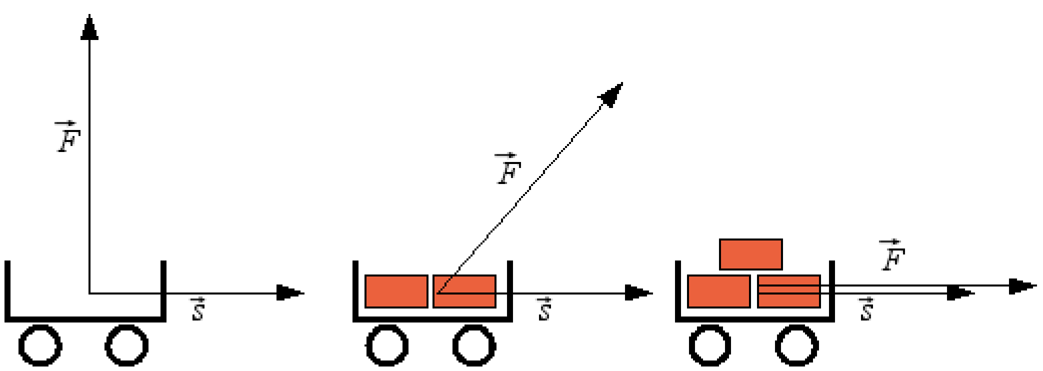
Úhlem vektorů $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ a $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ rozumíme konvexní úhel $<BAC$ s velikostí $|<BAC|=\phi$.



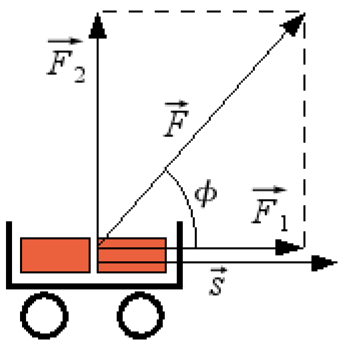
Pozn.: Vektory stejného směru svírají úhel velikosti 0^0 .

Skalární součin vektorů

Význam skalárního součinu vektorů vysvětlíme na příkladu z praxe. Působíme - li na určité těleso silou *F* po dráze *s*, vykonáme práci *W*. Z fyziky víme, že pro velikost této práce platí vztah $W=F\cdot s$. Síla i dráha jsou ale vektorové veličiny. Na pravé straně vztahu vystupují pouze jejich velikosti (správně bychom tedy měli psát $W=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|$) a vztah platí v tomto tvaru jen za předpokladu, že síla působí ve směru pohybu. Na následujících obrázcích působíme silou stejné velikosti na vozíček. Rozhodněte, ve kterém případě bude vykonaná práce největší.



Velikost práce, kterou je síla schopna vykonat tedy závisí na úhlu, který svírá s dráhou pohybu. Rozeberme si podrobněji prostřední případ.



Vidíme, že z vektorového hlediska se síla rozkládá na dvě složky, z nichž práci koná pouze složka $\vec{F}_1$ (složka $\vec{F}_2$ se snaží pouze vozíček nadzvednout a na vykonanou práci nemá vliv). Pro práci tedy platí:

$$W=|\vec{F}_1|\cdot|\vec{s}| \quad .$$

Velikost složky $\vec{F}_1$ můžeme vyjádřit pomocí velikosti původní síly a vhodné goniometrické funkce úhlu ϕ :

Pro vykonanou práci pak platí

$$W=$$

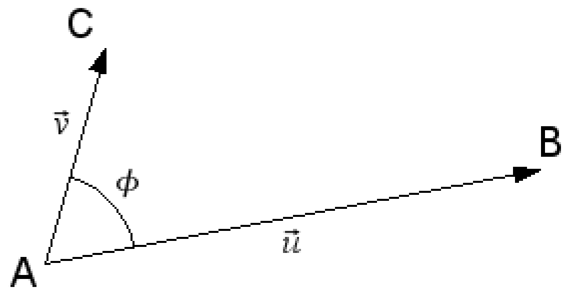
Výraz na pravé straně nazýváme skalární součin vektorů $\vec{F}$ a $\vec{s}$ a zkráceně jej zapisujeme $\vec{F}\cdot\vec{s}$. Po této dohodě si vztah pro výpočet práce zachovává původní formu pro libovolný směr síly a můžeme psát

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s} \quad .$$

Skalární součin pak zavádíme pro libovolné vektory:
Máme - li vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, které svírají úhel ϕ , pak jejich skalárním součinem rozumíme číslo

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\phi \quad .$$

Umístíme - li vektory do soustavy souřadnic, je možné skalární součin vypočítat z jejich souřadnic, aniž bychom znali úhel ϕ . Předpokládejme tedy, že máme vektory $\vec{u}=(u_x, u_y)$ a $\vec{v}=(v_x, v_y)$ (například vektory na spodním obrázku).



K obrázku se vážou následující úkoly:
1) Graficky nalezněte vektor $\vec{u}-\vec{v}$ a umístěte jej do bodu C.

2) ....

Pro skalární součin vektorů $\vec{u}=(u_x, u_y)$ a $\vec{v}=(v_x, v_y)$ platí:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=$$

Daný vztah přitom opět platí i v prostoru, kde je pouze rozšiřujeme o z-ovou souřadnici.
Navíc vidíme, že výpočet skalárního součinu pomocí souřadnic vektorů je velmi jednoduchý a můžeme jej využít k výpočtu jejich úhlu. Z výše uvedeného vztahu plyne

$$\cos\phi=$$

Př.1 Vypočtěte úhel vektorů $\vec{u}=(-2;3;1), \vec{v}=(4;-3;2)$

Př.2 Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC $A[2;1], B[8;3], C[4;5]$.

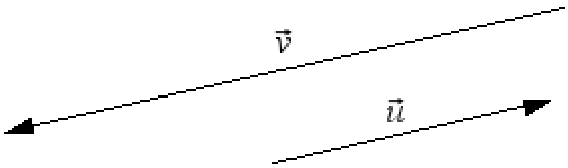
Náčrt: Řešení:

Z předchozího příkladu plyne, že pomocí skalárního součinu snadno určíme, zda dané vektory jsou vzájemně kolmé. Jak víme ze ZŠ, kolmost a rovnoběžnost se využívá při řadě konstrukčních úloh a nejinak tomu bude i v analytické geometrii. Proto kolmosti a rovnoběžnosti vektorů věnujeme samostatný odstavec.

Kolmost a rovnoběžnost vektorů

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou kolmé právě když jejich skalární součin je roven 0.
Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou rovnoběžné právě když je jeden z nich násobkem druhého .

Pozn.: Věta o rovnoběžnosti vektorů vlastně plyne z definice násobení vektoru konstantou. Například na spodním obrázku jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, kde $\vec{v}=-2\vec{u}$.



Př.3 Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou rovnoběžné
a) $\vec{u}=(-6;9), \vec{v}=(4;-6)$
b) $\vec{u}=(12;-4), \vec{v}=(4;-1)$

Př.4 Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolmé

a) $\vec{u}=(6;-8), \vec{v}=(4;-3)$ b) $\vec{u}=(12;-7;1), \vec{v}=(4;7;1)$

Př.5 Jsou dány vektory $\vec{u}=(1;2t), \vec{v}=(2t;2)$ Určete číslo t tak, aby byly

a) rovnoběžné,

b) kolmé