

Materiál byl vytvořen v rámci projektu  
**Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola**

*Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.*

# FUNKCE



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# FUNKCE

## Funkce

V praxi se často setkáváme s tím, že změna jedné veličiny způsobuje změnu veličiny druhé. Z vlastní zkušenosti například víme, že doba, po kterou bude těleso padat volným pádem, závisí na výšce, do které těleso zvedneme. Měníme - li tedy výšku tělesa, mění se v závislosti na ní doba volného pádu. Matematickou terminologií říkáme, že čas je **funkcí** výšky. Pro čas resp. výšku používáme zavedené značky  $t$  resp.  $h$ .

Provedeme - li několik pokusů s pády tělesa z různých výšek, u kterých vyloučíme odpor vzduchu, můžeme zjištěné údaje uspořádat do tabulky:

$h$ (m)	5	10	20	100	1000		
$t$ (s)	1	1,41	2	4,47	14,14		

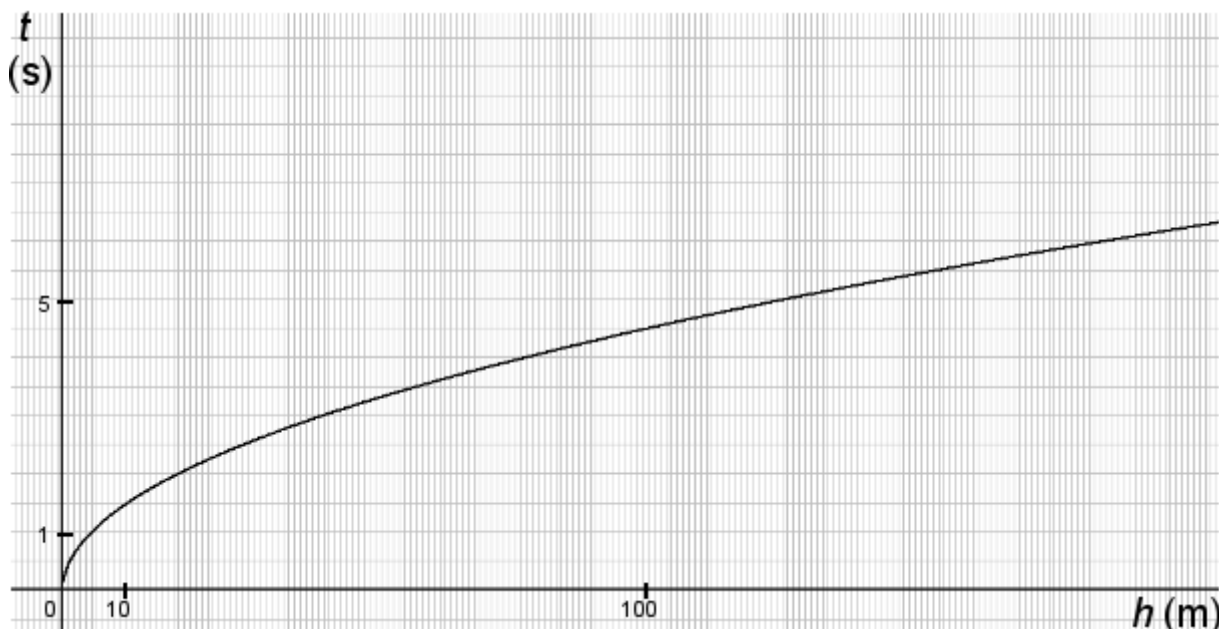
Tabulka je přehledná a jsme schopni v ní rychle vyhledat doby volného pádu pro různé výšky. Problém ale nastane, pokud bude chtít zjistit dobu pro jinou výšku, než je uvedeno v tabulce. Bude - li nás například zajímat, jak dlouho padá těleso z výšky 500 m, můžeme pouze konstatovat, že jde o čas mezi 5 a 14 sekundami.

Z tohoto důvodu je praktičtější zapsat závislost mezi časem a výškou pomocí rovnice, ve které budou vystupovat proměnné  $t$  a  $h$ . V našem případě platí:

$$t = \sqrt{\frac{h}{5}} .$$

Z tohoto vztahu můžeme vypočítat dobu volného pádu pro libovolnou výšku dosazením za  $h$ .

U některých vztahů může být dosazení pracnější než v našem případě a uživatel by spíše ocenil rychlou orientaci a přehlednost třeba i na úkor přesnosti. V takovém případě lze danou závislost znázornit graficky. Graf sestavujeme do soustavy souřadnic se dvěma osami, které odpovídají vystupujícím veličinám. Prostřednictvím grafu můžeme přecházet z jedné osy na druhou a rychle odhadovat příslušné hodnoty. Na spodním obrázku naleznete graf závislosti času na výšce volného pádu.



Př.1 Graficky odhadněte dobu volného pádu tělesa z výšky 150 m. Výsledek ověřte početně a zapište do tabulky.

Pozn. Je zřejmé, že za výšku nemůžeme dosazovat libovolná čísla. Nelze dosadit záporné výšky a rovněž shora je dosažení omezeno dosahem gravitační síly Země. Dosazování je omezeno tzv. **definičním oborem** funkce, který je součástí zadání a určuje, která čísla lze dosazovat.

## Definice funkce

Z předchozího příkladu jsme pochopili, že funkce slouží k vyjádření závislosti mezi dvěma veličinami. Toto chápání je jistě správné, ale jako matematická definice nepřesné a tedy nedostačující. V této kapitole si proto uvedeme, jak funkci definujeme z matematického hlediska.

Def.: Mějme neprázdnou množinu  $A$ , podmnožinu  $R$ . Přiřadíme - li **každému** číslu  $x$  z množiny  $A$  **právě jedno** reálné číslo  $y$ , dostaneme množinu  $f$  uspořádaných dvojic čísel  $[x ; y]$ , kterou nazýváme reálná funkce reálné proměnné  $x$  (krátce funkce).

Množinu  $A$  nazýváme definiční obor funkce a značíme ji také  $D(f)$ . Její prvky  $x$  nazýváme nezávisle proměnné.

Čísla  $y$  přiřazená  $x$  nazýváme závisle proměnné (závisí na volbě  $x$ ) nebo častěji funkční hodnoty. Množina všech funkčních hodnot se nazývá obor hodnot a značíme ji  $H(f)$ .

Pro vyjádření funkce z pravidla používáme zápis ve formě  $f : y = f(x) ; D(f)$ .

Def.: Mějme funkci  $f$  definovanou na množině  $D(f)$ . Pak grafem funkce budeme rozumět množinu všech bodů o souřadnicích  $[x ; f(x)] ; x \in D(f)$  v pravoúhlé soustavě souřadnic.

Již z úvodního příkladu s volným pádem vyplynulo, že v praxi je možné trojí zadání funkce. Každý z těchto tří způsobů má své výhody a nevýhody. Uvedme si tedy **způsoby zadání funkce** v matematice:

K zadání funkce funkce potřebujeme

a) definiční obor (abychom věděli, kterým číslům budeme přiřazovat) a

b) funkční předpis - tedy pravidlo, podle kterého budeme přiřazení provádět.

Podle formy funkčního předpisu rozlišujeme tři základní druhy zadání:

I. **Výčet**: spočívá v tom, že všechna přiřazení vypíšeme. Jeho výhodou je rychlé a přesné nalezení hodnot funkce pro různé proměnné. Je ale možný pouze tehdy, je-li definiční obor konečná množina, což je u důležitých funkcí málo obvyklé. Výčet může mít různé formy. Několik z nich si uvedeme na konkrétní funkci  $f_1$ .

$$f_1: \begin{array}{l} -1 \longrightarrow -3 \\ 0 \longrightarrow 4 \\ 2 \longrightarrow -2 \\ 4 \longrightarrow -3 \\ 5 \longrightarrow -1 \end{array}$$

nebo

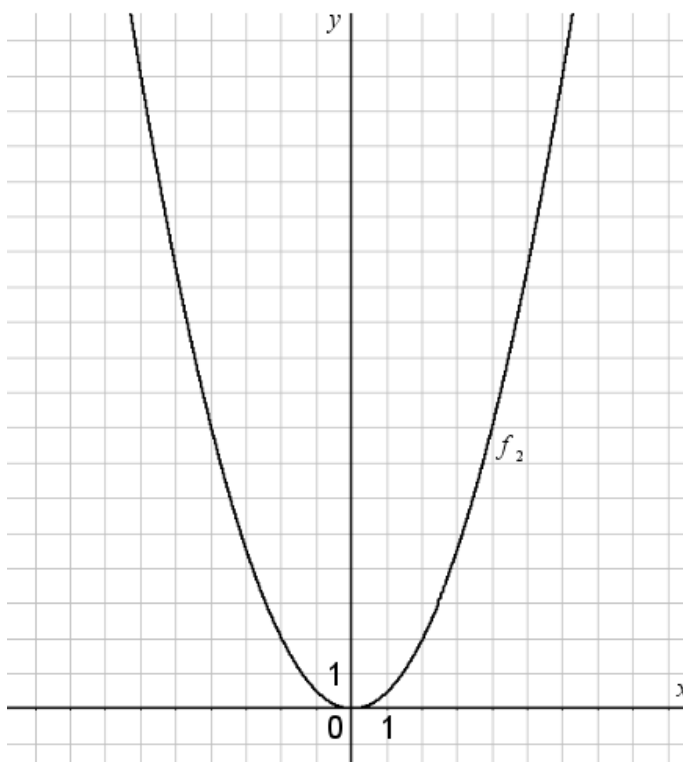
$$f_1: \begin{array}{l} f_1(-1) = -3 \\ f_1(0) = 4 \\ f_1(2) = -2 \\ f_1(4) = -3 \\ f_1(5) = -1 \end{array}$$

Patrně nejobvyklejší formou výčtu je pak tabulka.

Př.2 Zapište zadání funkce  $f_1$  do připravené tabulky.

$x$					
$f_1(x)$					

II. **Graf:** Jak jsme již uvedli, výhodou grafu je přehlednost a rychlá orientace, nevýhodou může být naopak malá přesnost při odečítání hodnot na osách. Příklad grafického zadání si ukážeme na funkci  $f_2$ .



III. **Rovnice:** Jde o nejobvyklejší formu zadání funkce, při kterém funkční hodnoty pro různá  $x$  dopočítáváme. Výhodou je naprostá přesnost a možnost počítat s neomezeným počtem proměnných. Nevýhodou může být obtížnější práce s některými druhy rovnic. Jedním z našich úkolů v matematice proto bude naučit se bezpečně pracovat s různými druhy funkcí zadanými rovnicí. Příklad takového zadání si můžeme ukázat na funkci  $f_3$ .

$$f_3: y = \frac{x^2 + 1}{x}; D(f_3) = (-5; 0)$$

Pozn.: Často se setkáme s tím, že u zadání funkce rovnicí není uveden definiční obor, který je nutnou součástí zadání. V takovém případě má zadávající na mysli tzv. **maximální definiční obor** - - tedy množinu všech čísel, která je možné dosadit do pravé strany rovnice.

Dříve než přistoupíme ke zkoumání různých druhů matematických funkcí, seznámíme se blíže s používanou terminologií a symbolikou.

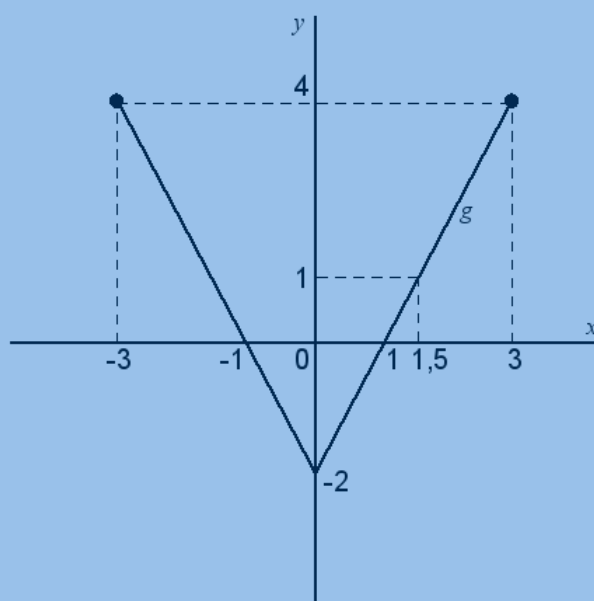
- Př.3
- Určete definiční obor a obor hodnot výše uvedených funkcí  $f_1$  a  $f_2$ .
  - Určete hodnotu funkce  $f_1$  v bodě -1, funkce  $f_2$  v bodě -6 a funkce  $f_3$  v bodě 1.
  - Ve kterém bodě nabývá funkce  $f_1$  hodnoty 4, funkce  $f_2$  hodnoty 8 a funkce  $f_3$  hodnoty 2?

Ne každý předpis, podle kterého řiřazujeme číslům jiná čísla musí být funkcí. V definici je uvedeno, že má – li se jednat o funkci, musí být přiřazeno každému číslu z určité množiny právě jedno číslo. není – li tato podmínka splněna, o funkci se nejedná.

- Př.4
- Př.4 Rozhodněte, zda následující množiny jsou funkcemi.
- $M_1 = \{[0 ; 2]; [-2 ; 0]; [4 ; 0]; [2 ; 2]; [-2 ; 3]\}$
  - $M_2 = \{[1 ; 1]; [2 ; 3]; [3 ; 1]; [0 ; 1]; [-2 ; 3]\}$

- Př.5
- Funkce  $f$  je dána výčtem:  $f = \{[2 ; 3]; [3 ; 5]; [4 ; 6]; [-2 ; 3]; [-3 ; 5]; [-4 ; 6]\}$  .
- Jakou hodnotu nabývá funkce v bodě 3?
  - Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty 6?
  - Určete  $D(f)$  a  $H(f)$ .

- Př.6 Funkce  $g$  je zadána graficky
- Určete  $g(3)$ ;  $g(0)$ ;  $g(-5)$  .
  - Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty  $-3$ ;  $1$ ;  $0$ ?
  - Určete  $D(g)$  a  $H(g)$ .



- Př.7 Je dána funkce  $h: y=2|x|+1; D(h)=(-4; 8)$  .
- Určete funkční hodnoty v bodech  $3$ ;  $-5$ ;  $\sqrt{3}-2$  .
  - Ve kterém bodě nabývá funkce hodnoty  $5$ ;  $19$ ?
  - Odhadněte obor hodnot funkce  $h$ .

Př.8 Určete maximální definiční obory funkcí  $f_1 - f_8$  .

a)  $f_1: y = \frac{1}{x^2 - 9}$

e)  $f_5: y = \sqrt{|x-6|}$

b)  $f_2: y = \sqrt{2-x}$

f)  $f_6: y = \frac{1}{\sqrt{|x-6|}}$

c)  $f_3: y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

g)  $f_7: y = \sqrt{1-|x|}$

d)  $f_4: y = \frac{x^2}{|x|-2}$

h)  $f_8: y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

Pozn.: Určování maximálního definičního oboru funkce je vlastně určování podmínky pro  $x$  tak, jak jej známe již z učiva o algebraických výrazech. Zohledňujeme přitom dvojí omezení:

- Výraz ve jmenovateli zlomku se nesmí rovnat nule.**
- Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule.**

Př.10 Je dána funkce  $f: y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}; D(f) = \langle 0; 3 \rangle$  .

- Sestrojte její graf.
- Určete její obor hodnot.
- Z grafu odhadněte funkční hodnotu v bodě 1,5 a výsledek ověřte početně.

