Materiál byl vytvořen v rámci projektu
Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

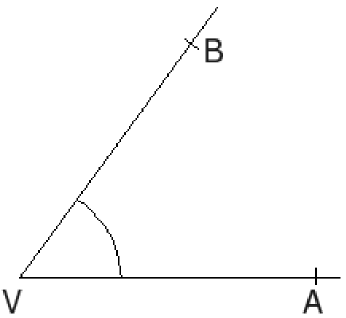
ORIENTOVANÝ ÚHEL A JEHO VELIKOST

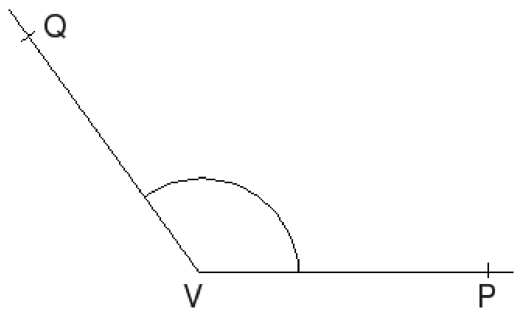
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ORIENTOVANÝ ÚHEL A JEHO VELIKOST

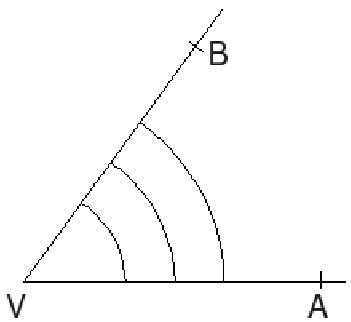
Způsoby měření úhlu

V úvodu planimetrie jsme si zopakovali pojem úhlu. Připomeňme si, že úhel jsme doposud chápali jako plošný útvar, přesněji řečeno jako část roviny ohraničenou dvěma polopřímkami o společném počátku. Velikost úhlu jsme pak měřili ve stupních. Úhel o velikosti jednoho stupně získáme tak, že pravý úhel rozdělíme na 90 stejných dílů. Dílčími jednotkami úhlového stupně jsou úhlové minuty a úhlové vteřiny a platí: $1^0=60';1'=60''$. Stupně jako jednotky pro měření velikosti úhlu používáme zejména z tradičních důvodů. Na používání této jednotky jsme zvyklí nejen ze základní školy, ale i z běžného hovoru („Ve svých názorech otočil o 180^0 .“ apod.). Proto pro nás není problémem představit si, případně načrtnout, úhel libovolné velikosti ve stupních. Při hlubším zamyšlení nad způsobem zavedení této jednotky ale pravděpodobně dospějeme k názoru, že z dnešního hlediska je dělení na devadesátiny, případně třistašedesátiny málo obvyklé a je doposud užíváno spíše z důvodů tradičních. Stupňovou míru v matematice zcela nezavrhujeme a používáme ji zejména pro řešení praktických problémů z trigonometrie. Pro další potřeby matematiky však zavádíme ještě další způsob měření úhlů. Jedná se o tzv. míru obloukovou. Základní princip měření úhlu v obloukové míře je velmi jednoduchý. Při náčrtu úhlu si často při jeho značení vypomáháme obloukem spojujícím obě ramena:



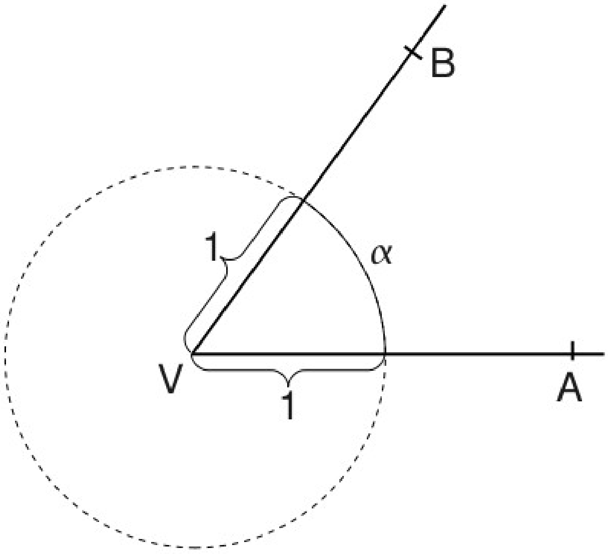


Na první pohled je patrné, že většímu úhlu odpovídá větší oblouk. Nabízí se tedy myšlenka, měřit úhel pomocí velikosti oblouku, který vytíná na kružnici. Tento přístup má ovšem jedno úskalí, které si ukážeme na dalším obrázku:



Je vidět, že délka oblouku nezávisí jen na velikosti úhlu, ale také na poloměru kružnice. Učiníme proto dohodu, podle které budeme při měření velikosti úhlu pomocí oblouku vždy používat kružnici o poloměru jedna (tzv. jednotkovou kružnici). Na volbě jednotky přitom nezáleží. Může se jednat o jeden centimetr, jeden decimetr, jeden palec atd., jen je potřeba délku oblouku měřit ve stejné jednotce. Tento způsob měření úhlu se nazývá oblouková míra.

Velikostí α úhlu v obloukové míře budeme rozumět délku oblouku, který úhel vytíná na jednotkové kružnici se středem v jeho vrcholu.



Základní jednotkou obloukové míry je jeden radián - $1 rad$. Je to úhel, který na kružnici vytíná oblouk stejné délky, jako je poloměr této kružnice. Jde o jednotku bezrozměrnou, což znamená, že velikosti úhlu v radiánech jsou pouze čísla a jednotku *rad* za nimi nemusíme psát. Přesto značku radiánu můžeme kdykoli uvést pokud máme obavu ze záměny se stupni.

Řada úloh v následujícím učivu bude zadána v radiánech. Pokud pro nás bude předtava o velikosti takového úhlu obtížná, můžeme si vypomoci převodem na stupně. Převodní vztah odvodíme z velikosti plného úhlu:

Víme, že velikost plného úhlu ve stupních je:

$$\phi =$$

Velikost stejného úhlu v radiánech je délka odpovídajícího oblouku na jednotkové kružnici, tedy vlastně délka celé kružnice:

$$\phi =$$

Odtud plyne převodní vztah mezi stupni a radiány:

.... resp.

....

K převodu pak můžeme používat například trojčlenku.

Př.1 Převeďte na stupně

a) 1,5 *rad*

b) $\frac{7}{10}\pi$

Př.2 Převeďte na radiány

a) $51^0 10^{\prime}$

b) 80^0

Orientovaný úhel

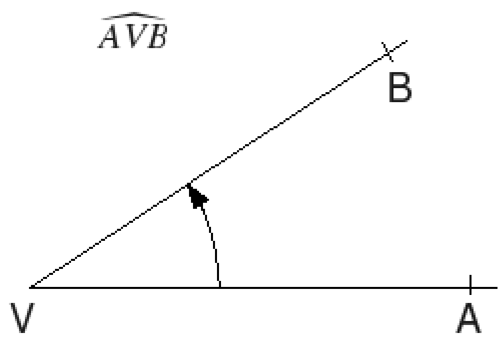
Pokud budeme úhel chápat jeko část roviny, umožňuje nám to přisuzovat mu velikosti 0^0 až 360^0 (resp 0 *rad* až 2π *rad*). Možná jsme se ale již setkali například se situací, kdy byl snowboardista pochválen za „pětsetčtyřicítku“.

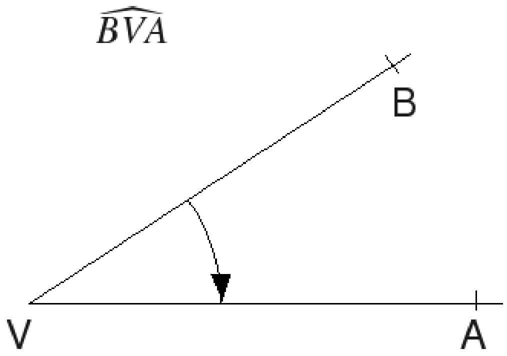
Př.3 Pokuste se vysvětlit, co tento výrok v praxi znamená.

Chápat úhly o velikostech větších než 360^0, ale také o velikostech záporných, nám umožní zavedení tzv. orientovaného úhlu.

Orientovaný úhel definujeme jako uspořádanou dvojici polopřímek o společném počátku. Slovo „uspořádaná“ přitom znamená, že tyto polopřímky mají určené pořadí. První z nich se nazývá počáteční rameno a druhá koncové rameno. Orientovaný úhel s počátečním ramenem $\rightarrow VA$ a koncovým ramenem $\rightarrow VB$ značíme $\widehat{AVB}$.

Na první pohled se nám může definice orientovaného úhlu zdát velice podobná definici předchozí. Rozdíl spočívá zejména v tom, že vznik orientovaného úhlu můžeme chápat tak, že otáčíme počátečním ramenem, až splyne s ramenem koncovým. Směr tohoto otáčení znázorňujeme na obrázku šipkou. Na prvním obrázku je například znázorněn orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ a na druhém orientovaný úhel $\widehat{BVA}$.

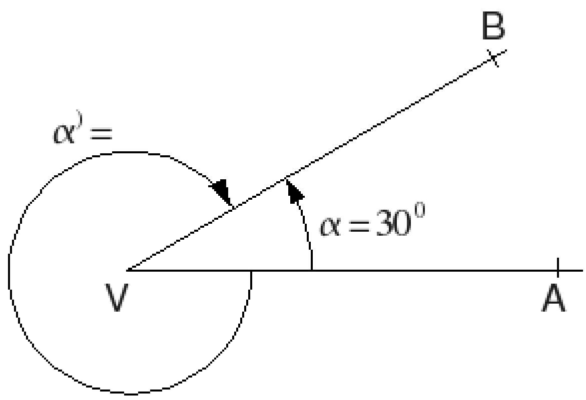




Tento přístup nám umožní rozlišit kladný a záporný smysl otáčení a podle toho hovořit o kladných nebo záporných hodnotách orientovaného úhlu. Za kladný smysl otáčení přitom budeme považovat pohyb proti směru hodinových ručiček (tak je tomu také ve fyzice a technické praxi).

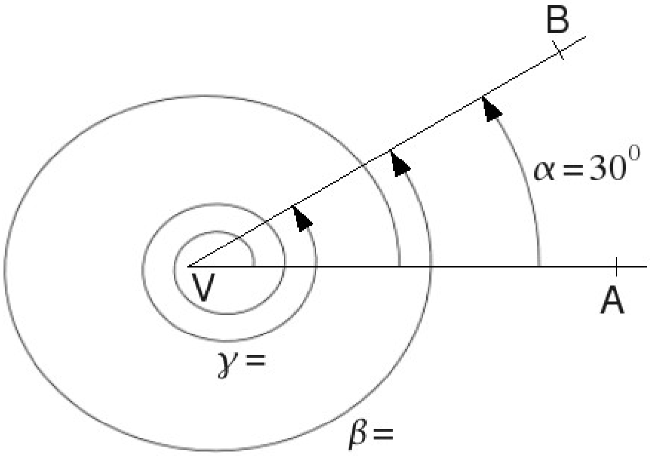
Velikost orientovaného úhlu, základní úhel

Zajímavým důsledkem výše uvedených úvah je, že jednomu orientovanému úhlu je možné přisoudit více velikostí, podle způsobu, jakým vnímáme jeho vznik. Předpokládejme například, že na spodním obrázku máme orientovaný úhel $\widehat{AVB}$ s velikostí $\alpha=30^0$. Je ovšem možné jej také vnímat jako úhel s velikostí $\alpha' =$ pokud počátečním ramenem otáčíme v záporném smyslu.



Přitom jde stále o orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, protože rameno $\rightarrow VA$ je v obou případech počáteční.

Zmíněnému úhlu lze ovšem přisoudit více velikostí, i když zůstaneme pouze u otáčení v kladném smyslu (vzpomeňme si na „pětsetčtyřicítku“ snowboardisty). Na spodním obrázku jsou znázorněny tři způsoby, kterými si lze představit vznik orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, kterým odpovídají velikosti $\alpha=30^0$, $\beta=$ a $\gamma=$.



Orientovaný úhel tedy nemá velikost pouze jednu, ale má nekonečně mnoho velikostí, které se vzájemně liší o 360^0 . Základní velikostí orientovaného úhlu přitom nazýváme tu z nich, která se nachází v rozmezí 0^0 až 360^0 (popř. v intervalu $\langle 0;2\pi)$ pokud budeme pracovat s radiány).

Velikostí orientovaného úhlu tedy budeme nazývat každou z hodnot

$$\omega=\alpha+k\cdot 360^0 \text{ , resp}$$

$$\omega=\alpha+k\cdot 2\pi=\alpha+2k\pi \text{ ,}$$

kde $k\in Z$ a α je základní velikost orientovaného úhlu.

Pozn.: Číslo *k* ve výše uvedených zápisech vyjadřuje ....

Přestože orientovaný úhel může nabývat hodnot větších než 360^0 (2π) a také hodnot záporných, pro naprostou většinu úloh je rozhodující pouze poloha koncového ramene. O ní si můžeme vytvořit nejlepší představu ze základní velikosti. Hledání základní velikosti orientovaného úhlu proto patří mezi dovednosti, které bychom měli bezpečně zvládnout.

Př.4 Nalezněte základní velikosti následujících orientovaných úhlů v příslušných jednotkách.

a) 382^0 b) 1940^0 c) 9π d) $\frac{21}{4}\pi$ e) -1486^0 f) $-\frac{43}{6}\pi$