Materiál byl vytvořen v rámci projektu
Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

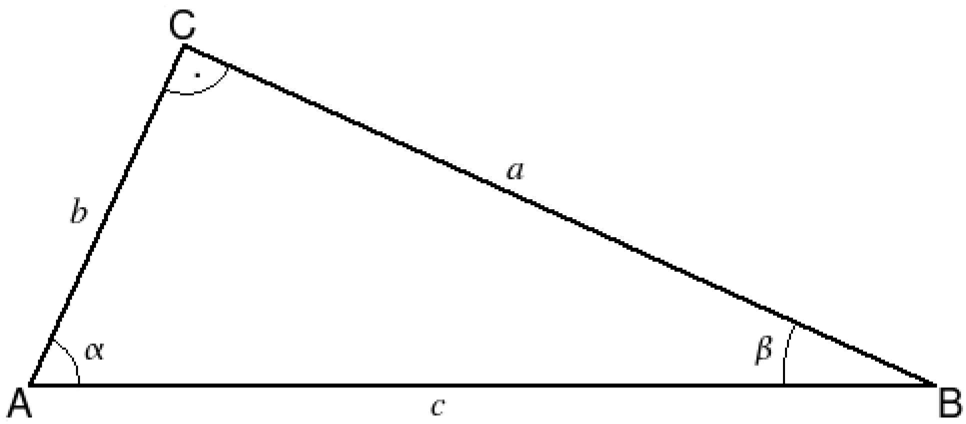
GONIOMETRICKÉ FUNKCE OBECNÉHO ÚHLU

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GONIOMETRICKÉ FUNKCE OBECNÉHO ÚHLU

Opakování goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

Cílem této kapitoly je zavést goniometrické funkce pro libovolný orientovaný úhel, tzn. také pro úhly záporné a úhly s velikostí větší než 360^0. Dříve, než k tomu přistoupíme, bude vhodné si připomenout, jak jsme definovali goniometrické funkce pro úhly v pravoúhlém trojúhelníku. Mějme například pravoúhlý trojúhelník na spodním obrázku:



V pravoúhlém trojúhelníku jsme goniometrické funkce definovali jako poměr určitých stran. Pro zopakování postačí, když vypíšeme například goniometrické funkce úhlu α :

$$\sin\alpha =$$

$$\cos\alpha =$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha =$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha =$$

Pomocí těchto poměrů můžeme odvodit některé důležité vztahy mezi goniometrickými funkcemi, které nám později pomohou při mnoha výpočtech

1. V pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta. U našeho trojúhelníku je možné ji zapsat:

$$a^2+b^2=c^2$$

Vydělíme – li obě strany c^2 ,dostaneme

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

Danou rovnost můžeme zapsat pomocí goniometrických funkcí úhlu α, které jsme si vypsali dříve:

2. Pomocí goniometrických funkcí úhlu α můžeme také vyjádřit následující poměry:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

3. Pomocí goniometrických funkcí úhlu α lze zapsat i následující zlomky:

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} =$$

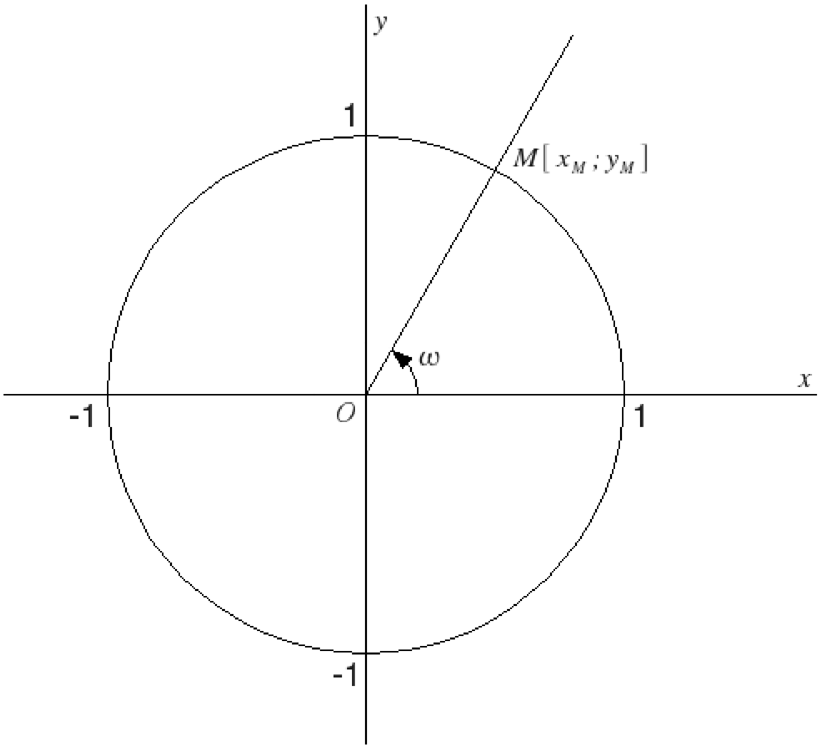
$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

Vidíme, že odvození těchto vztahů není obtížné a v případě potřeby bychom byli schopni je kdykoli zopakovat.

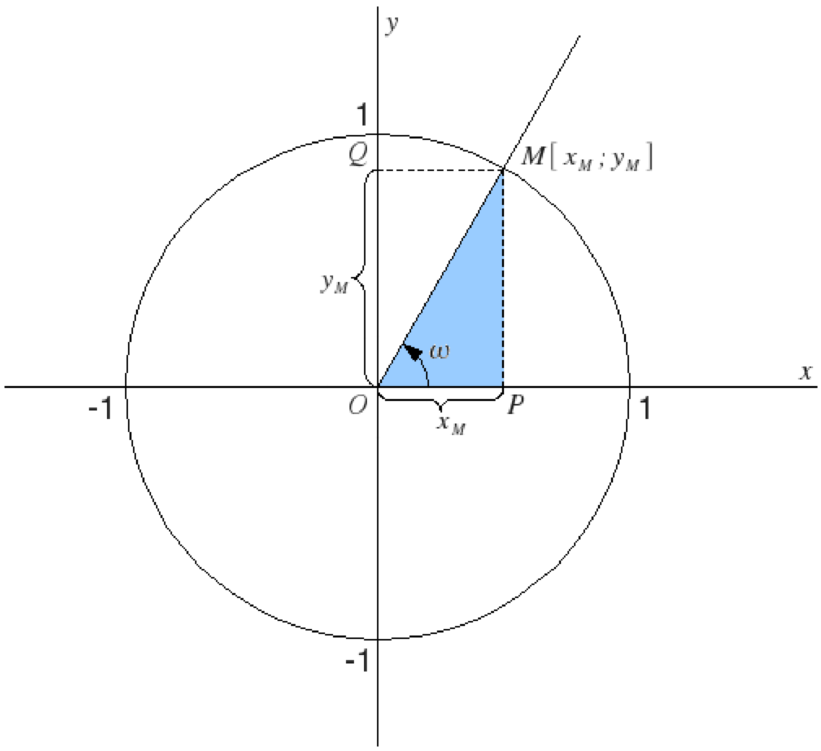
Goniometrické funkce obecného úhlu

Připomeňme si, že goniometrické funkce jsme zatím definovali pomocí pravoúhlého trojúhelníku. To nám ale umožňuje pracovat pouze s ostrými úhly. Také vztahy, které jsme pro práci s nimi odvodili se zatím vztahují jen k ostrým úhlům. V předchozí kapitole jsme ale naše vnímání úhlu rozšířili nejen na úhly tupé, ale také na úhly s velikostí větší než 360^0 a na úhly záporné. Budeme – li chtít definovat goniometrické funkce pro obecný úhel, je zřejmé, že nebude možné použít pravoúhlý trojúhelník. Goniometrické funkce obecného úhlu proto budeme definovat jiným způsobem. Přitom se budeme snažit, aby nová definice ponechala v platnosti předchozí definici pomocí pravoúhlého trojúhelníku (pro ostré úhly) a byla spíše jejím rozšířením resp. zobecněním. Při novém zavedení goniometrických funkcí budeme také usilovat o to, aby zůstaly (s případným drobným omezením) v platnosti výše odvozené vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

K zavedení goniometrických funkcí obecného úhlu využijeme jednotkovou kružnici (kružnici o poloměru 1), kterou umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, aby její střed byl v bodě O [0;0]. Úhel ω, u kterého budeme určovat goniometrické funkce, budeme sestrojovat tak, aby jeho vrchol byl rovněž v bodě O [0;0] a počátní rameno splývalo s kladnou částí osy x. Bod, ve kterém koncové rameno protne jednotkovou kružnici, označíme $M[x_M; y_M]$.



Z bodu M spustíme kolmice na osu x a y a průsečíky označíme po řadě P,Q. Takovýmto způsobem vytvoříme pravoúhlý trojúhelník OPM s vnitřmím úhlem ω u vrcholu O. Jedním z našich požadavků na obecnější definici goniometrických funkcí bylo, aby byla zachována původní definice v pravoúhlém trojúhelníku. Vypočteme tedy podle ní $\sin\omega$ a $\cos\omega$ v pravoúhlém trojúhelníku OPM.



$$\sin\omega =$$

$$\cos\omega =$$

Ukazuje se tedy, že použijeme - li nám známou definici goniometrických funkcí v I. kvadrantu, tzn. pro ostrý úhel, můžeme sinus a kosinus odečítat přímo na souřadnicových osách. Nabízí se tedy myšlenka zavést goniometrické funkce i v dalších kvadrantech obdobným způsobem, což také učiníme:

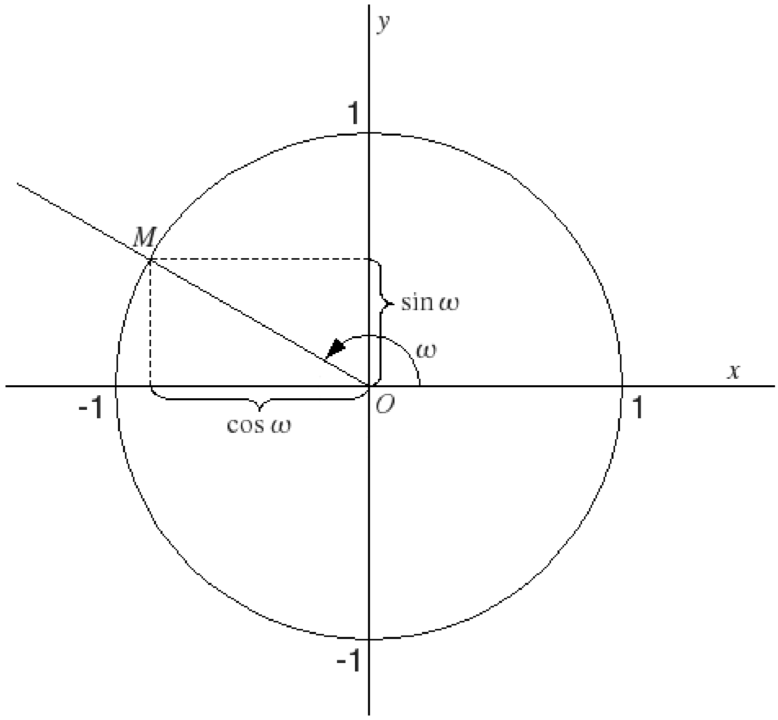
Provedeme – li v kartézské soustavě souřadnic výše popsanou konstrukci, díky níž získáme na jednotkové kružnici bod $M[x_M ; y_M]$ jako její průsečík s koncovým ramenem úhlu ω, pak $\sin\omega$ definujeme jako *x* – ovou souřadnici bodu *M*, tedy

$$\sin\omega = x_M$$

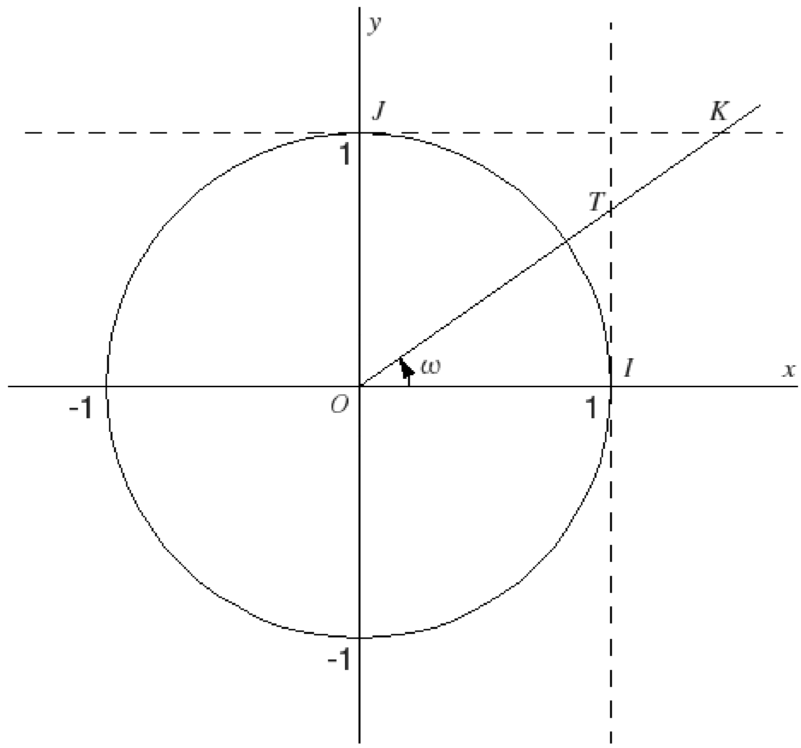
a $\cos\omega$ definujeme jako *y* – ovou souřadnici bodu *M*, tedy

$$\cos\omega = y_M \quad .$$

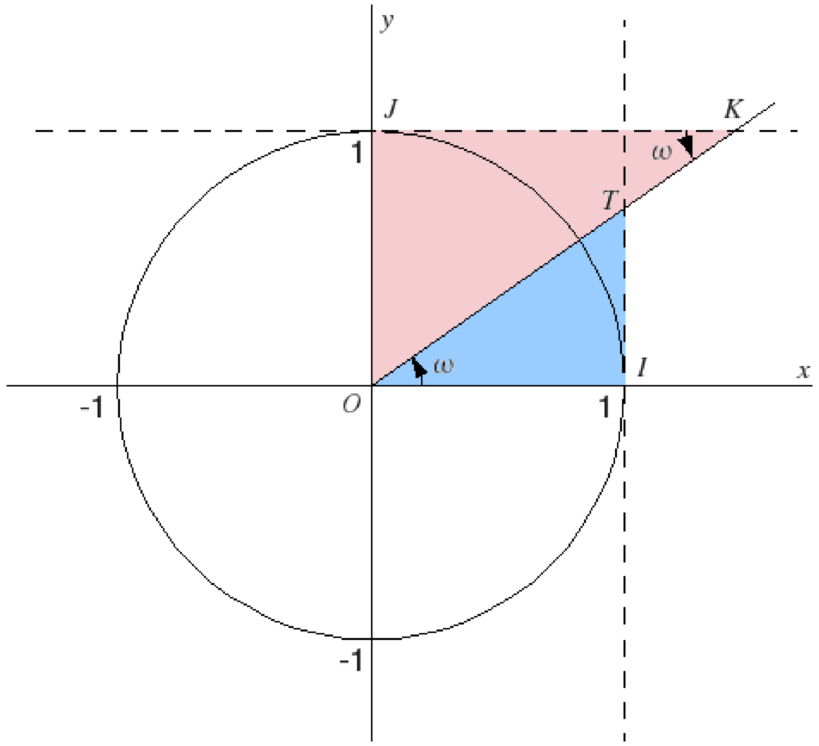
Uvedená definice přitom platí ve všech kvadrantech. Na dalším obrázku je například ukázka hledání hodnot sinu a kosinu ve druhém kvadrantu:



Pomocí jednotkové kružnice se středem v počátku soustavy souřadnic je možné definovat i zbývající goniometrické funkce tangens a kotangens. Pro jejich zavedení sestrojíme ještě tečny k jednotkové kružnici v bodech $I\,[1;0]$ a $J\,[0;1]$. Úhel opět sestrojíme výše popsaným způsobem (s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a s počátečním ramenem na kladné části osy x), ale tentokrát budeme hledat průsečíky koncového ramene se sestrojenými tečnami. Průsečíky označíme po řadě T a K.



Takovýmto způsobem jsme získali pravoúhlé trojúhelníky *OIT* a *OKJ* s vnitřním úklem ω u vrcholu *O* resp. *K*.

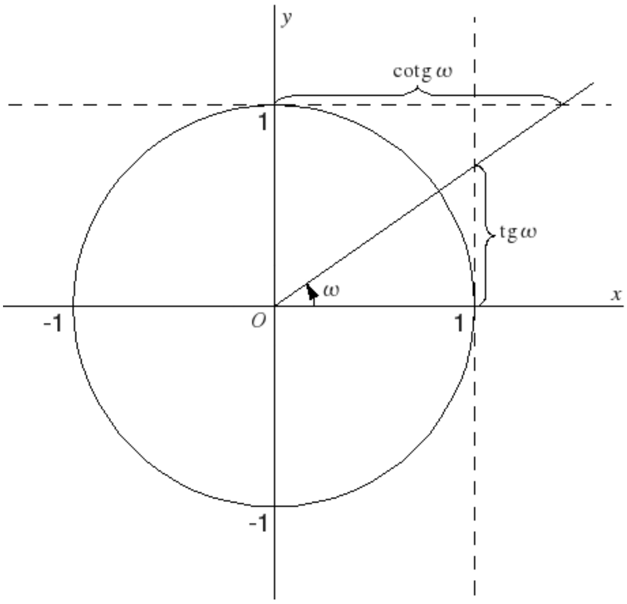


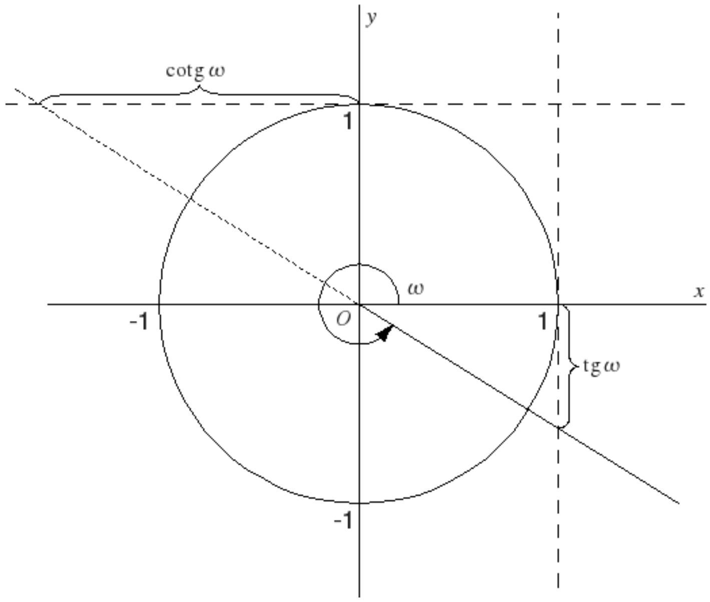
V trojúhelníku *OIT* vypočteme tangens úhlu ω a v trojúhelníku *OKJ* vypočteme kotangens úhlu ω :

$$\mathrm{tg}\,\omega =$$

$$\mathrm{cotg}\,\omega =$$

Vidíme, že v I. kvadrantu můžeme tangens a kotangens odečítat na tečnách k jednotkové kružnici. Abychom definici goniometrických funkcí tangens a kotangens rozšířili i na ostatní úhly, budeme na těchto tečnách odečítat tangens a kotangens i v ostatních kvadrantech. Na následujících obrázcích můžete srovnat způsob hledání funkcí tangens a kotangens v prvním a ve čtvrtém kvadrantu. Všimněte si, že v případě, kdy koncové rameno danou tečnu neprotne, prodlužujeme je na opačnou stranu.

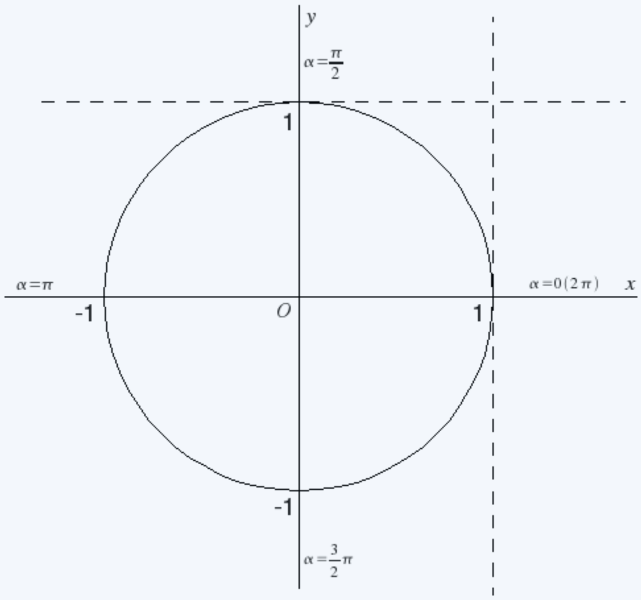




Možná jste si sami povšimli, že jedním z důsledků nové definice goniometrických funkcí je, že jejich znaménko se mění podle polohy koncového ramene.

Př.1 Určete znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

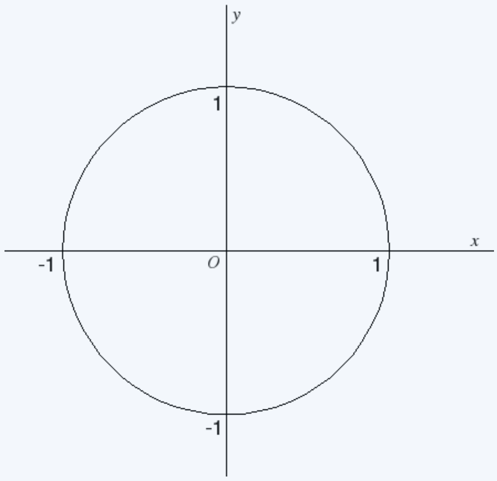
	I. kvadrant $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	II. kvadrant $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	III. kvadrant $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$	IV. kvadrant $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\mathrm{tg}\, \alpha$				
$\mathrm{cotg}\, \alpha$				



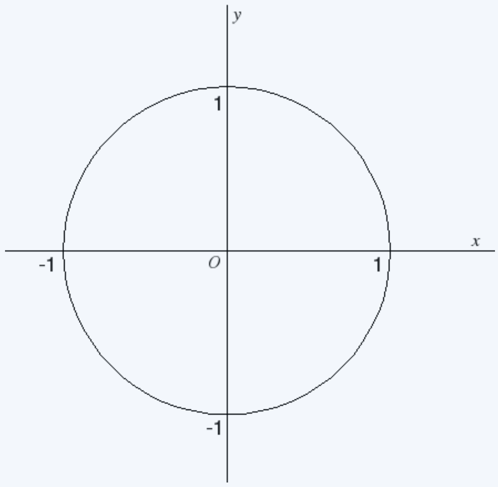
Pomoci vám může také následující pomůcka.

Př.2 Pomocí jednotkové kružnice určete znaménka následujících čísel:
a) $\sin 1621^0$
b) $\operatorname{cotg} 18{,}3\,rad$

a)



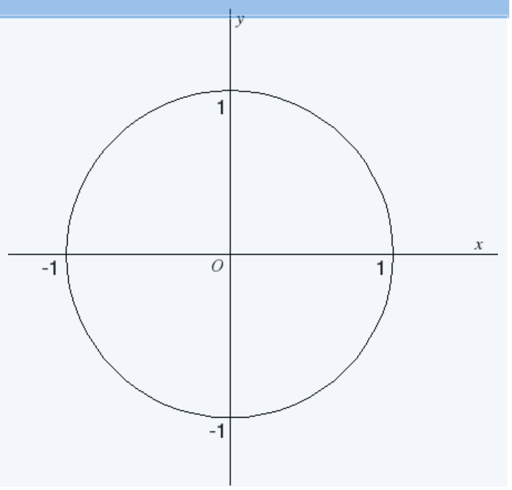
b)



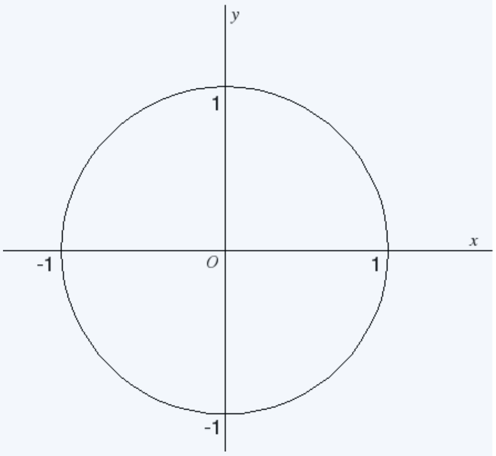
Z předchozího příkladu plyne, že při určování hodnot goniometrických funkcí úhlů s velikostí větší než 2π (360^0) není důležitý počet otočení koncového ramene, ale pouze základní velikost úhlu.

Př.3 Pomocí jednotkové kružnice rozhodněte, která z hodnot goniometrických funkcí je větší:
a) $\cos 193^0$ a $\cos 194^0$
b) $\operatorname{tg} 2{,}97\,rad$ a $\operatorname{tg} 2{,}98\,rad$
c) $\sin 262^0$ a $\sin 279^0$
d) $\sin 46^0$ a $\cos 46^0$

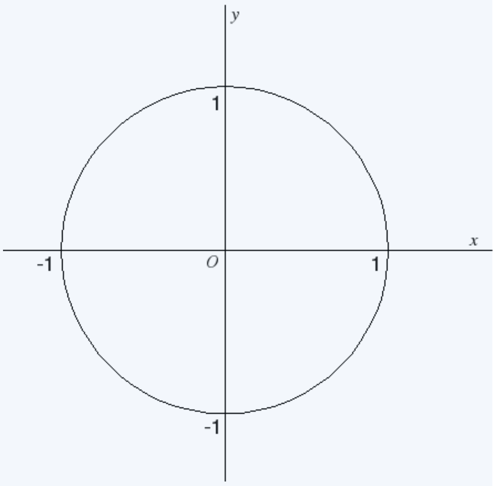
a)



b)



c)



d)