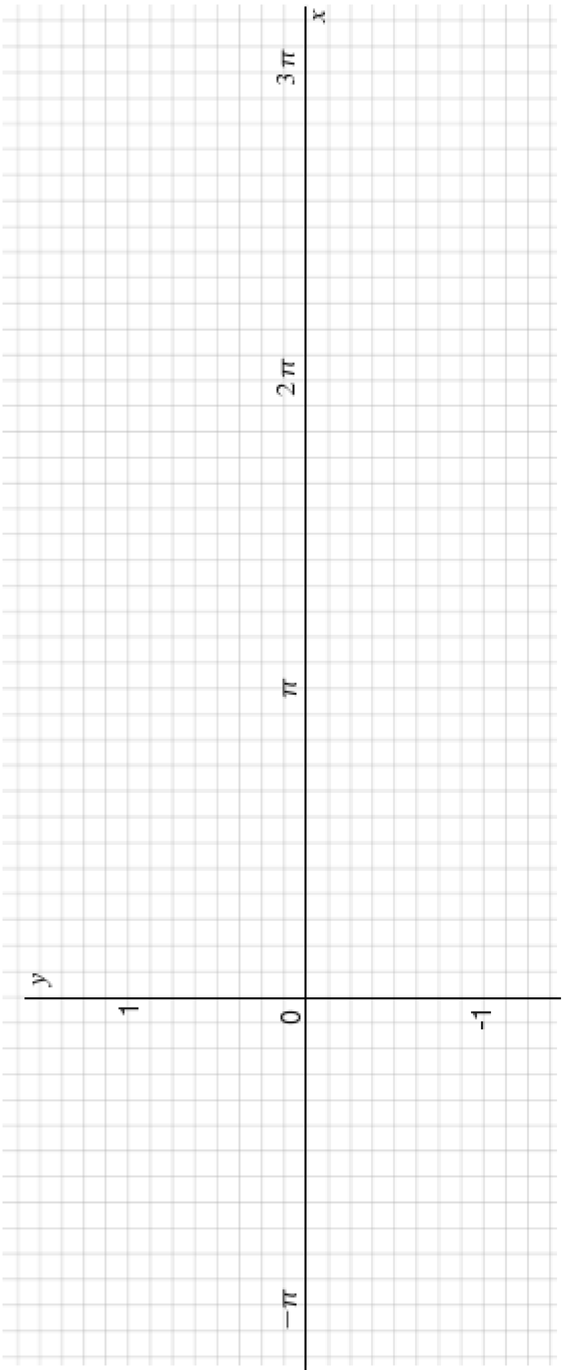
Materiál byl vytvořen v rámci projektu
Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

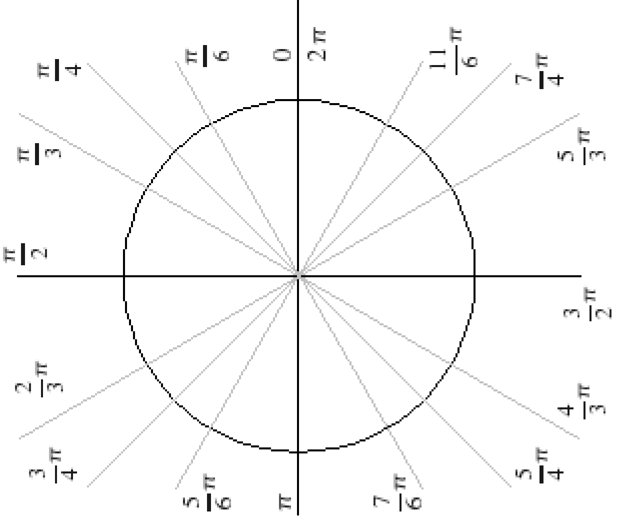
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GRAFY GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ

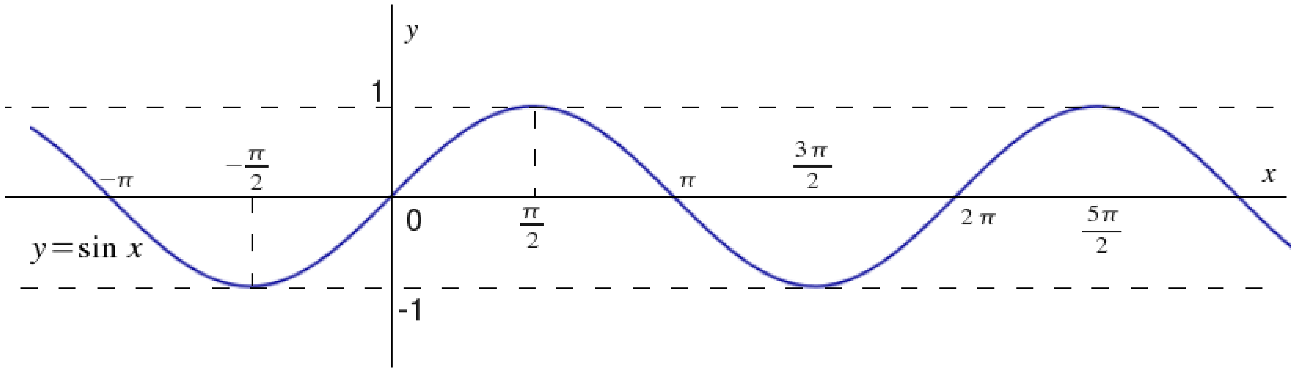




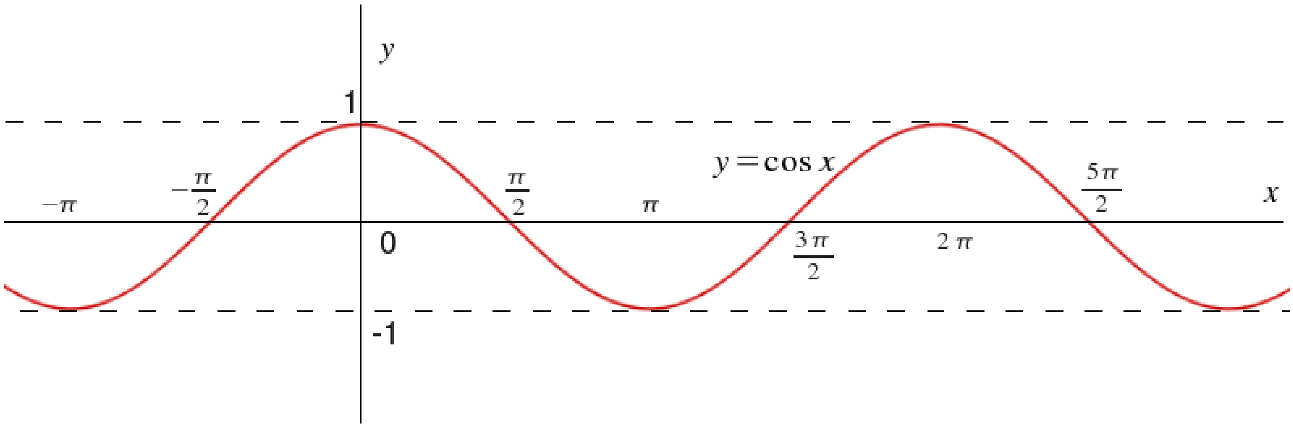
Základní grafy goniometrických funkcí

V předchozí kapitole jsme se naučili určovat hodnoty goniometrických funkcí, což nám umožní sestrojit jejich grafy. Sestrojíme nejprve graf funkce $f: y = \sin x$. Vzhledem k tomu, že jde o zcela nový graf, mohli bychom sestrojit tabulku, ve určíme sinus pro dostatečné množství úhlů. Jak do tabulky, tak do grafu bychom přitom měli dosazovat úhly v radiánech, protože pak vlastně půjde o práci s čísly (nikoli s jednotkami), jak je to u funkcí obvyklé. Důležité hodnoty přitom nezískáme v bodech 1(*rad*), 2(*rad*) apod., ale spíše v násobcích π - tedy např. $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi \ldots$, které odpovídají úhlům $30^0; 90^0; 180^0; 360^0 \ldots$. Nevýhodou ovšem v každém případě bude, že vypočtené hodnoty nejsou zpravidla celočíselné ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ apod.). Abychom se vyhnuli zaokrouhlení, budeme hodnoty získávat přímo z jednotkové kružnice a na graf je budeme přenášet graficky. Postup si můžete prohlédnout [zde](zde).

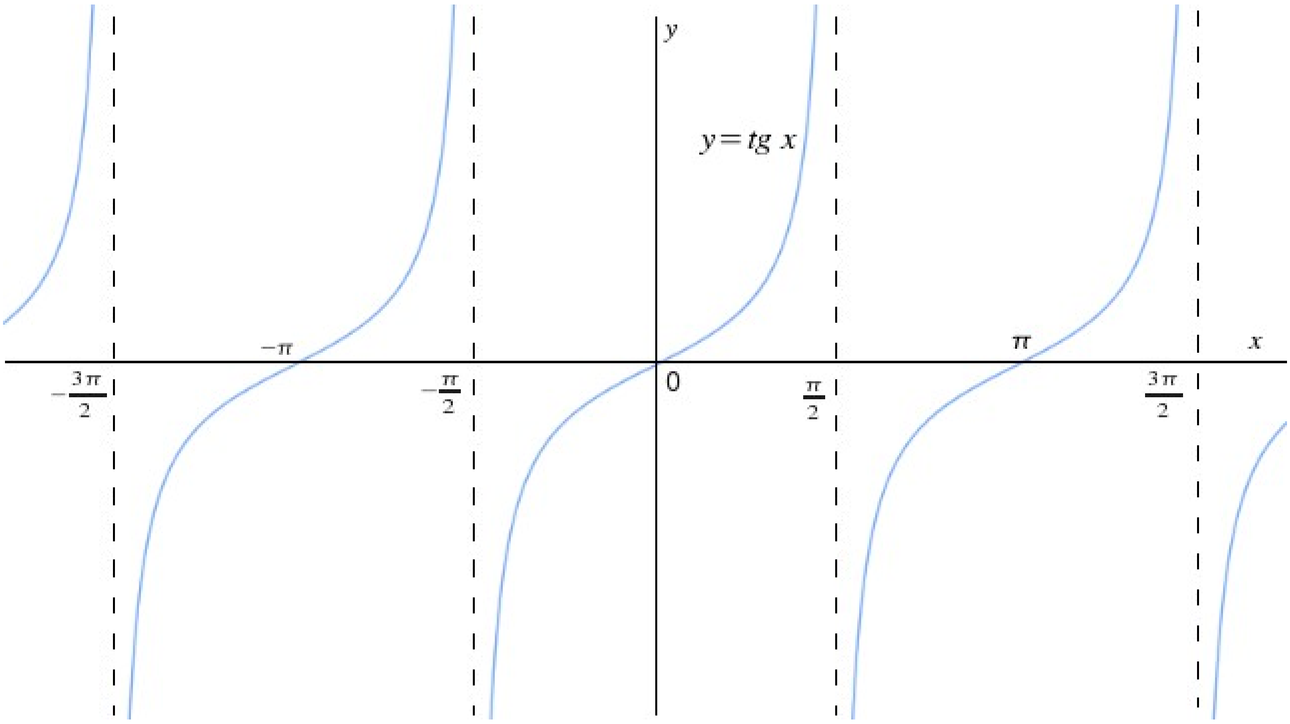
Podobně bychom mohli postupovat u grafů zbývajících tří goniometrických funkcí. Pro pochopení principu konstrukce ale jeden graf jistě postačí. Ostatní najdete sestrojeny na další stránkách.



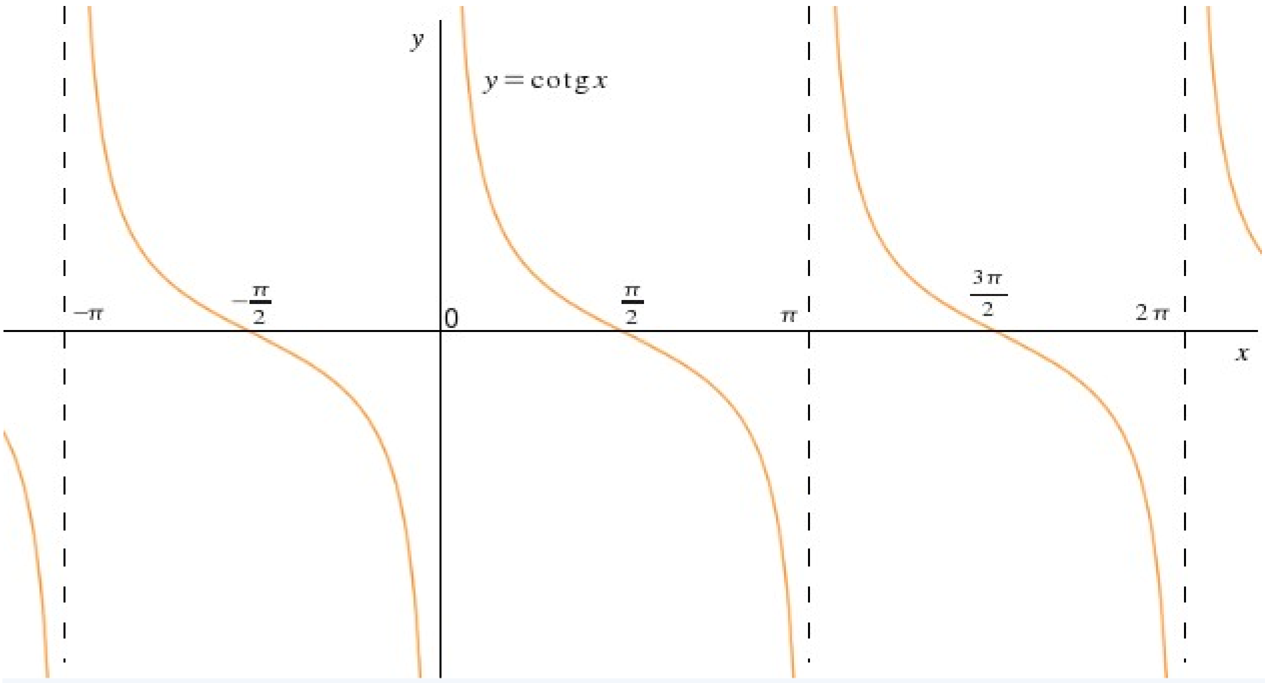
y
1
x
0
-1
y = sin x
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2



y
1
x
0
-1
y = cos x
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2



y
y = tg x
x
−π
π
0
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$



y
y = cotg x
x
−π
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

Př.1 Pod základní grafy goniometrických funkcí vypište jejich vlastnosti.

Transformace grafů goniometrických funkcí

Některé transformace grafů známe již z 2. ročníku. Připomeňme si, že máme – li určirou funkci $f(x)$,jejíž graf známe pak

a) graf funkce $f(x+a)$ je oproti grafu funkce *f* posunut o *a* jednotek ve směru osy *x*, a to

- doleva pro $a>0$ a
- doprava pro $a<0$,

b) graf funkce $f(x)+b$ je oproti grafu funkce *f* posunut o *b* jednotek ve směru osy *y*, a to

- nahoru pro $b>0$ a
- doleva pro $b<0$,

c) graf funkce $-f(x)$ je s grafem funkce *f* osově souměrný podle osy *x*,

d) graf funkce $f(-x)$ je s grafem funkce *f* osově souměrný podle osy *y*.

Pro zopakování si několik těchto transformací aplikovaných na funkci sinus můžete prohlédnout zde.

Goniometrické funkce jsou vhodným učivem k tomu, abychom naše znalosti o transformacích rozšířili o násobek funkce a násobek argumentu. K ukázce opět využijeme funkci $f_0\colon y=\sin x$ a její graf. Budeme zkoumat, v jakém vztahu jsou k tomuto grafu grafy funkcí

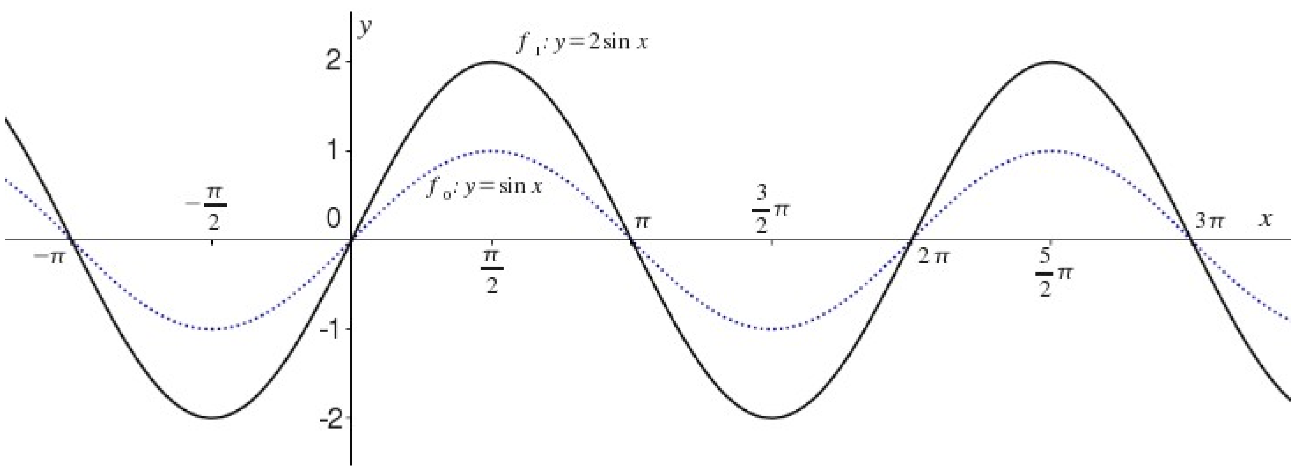
$f_1\colon y=2\sin x\,;\ f_2\colon y=\frac{1}{2}\sin x\,;\ f_3\colon y=\sin 2x$ a $f_4\colon y=\sin\frac{1}{2}x$.

1. Graf funkce $f_1\colon y=2\sin x$

Funkce, ze které budeme vycházet, tedy $f_0\colon y=\sin x$ nabývá např. v bodě $\frac{\pi}{2}$ hodnoty ....

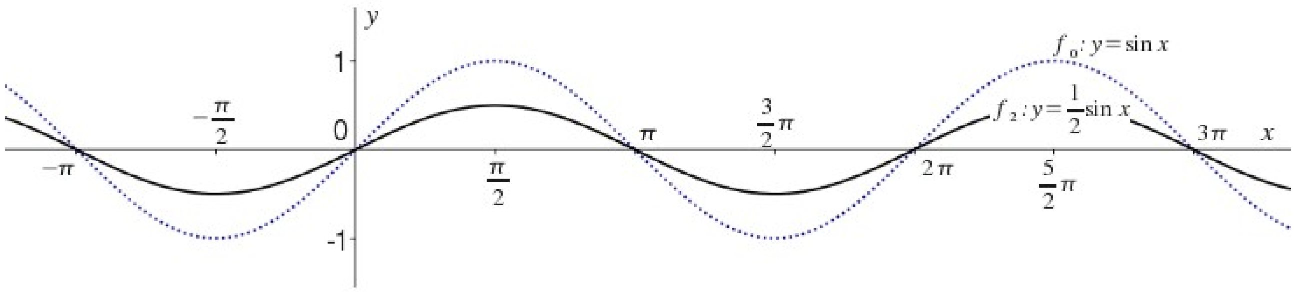
Funkce $f_1\colon y=2\sin x$ nabývá ve stejném bodě $\frac{\pi}{2}$ hodnoty $2\sin\frac{\pi}{2}=$ ....

Je zřejmé, že k podobné situaci dochází v libovolném bodě a můžeme říct, že funkce $f_1\colon y=2\sin x$ nabývá oproti funkci $f_0\colon y=\sin x$ dvojnásobných hodnot. Průsečíky s osou *x* se přitom nemění.



2. Graf funkce $f_2: y = \frac{1}{2} \sin x$

Obdobnou úvahou jako u první funkce dojdeme k závěru, že funkce $f_2: y = \frac{1}{2} \sin x$ nabývá oproti funkci $f_0: y = \sin x$ hodnot .... Průsečíky s osou x přitom opět zůstávají



stejné.

3. Graf funkce $f_3: y = \sin 2x$

Chceme – li u funkce $f_0: y = \sin x$ získat hodnotu 1, je potřeba za x dosadit $\frac{\pi}{2}$.

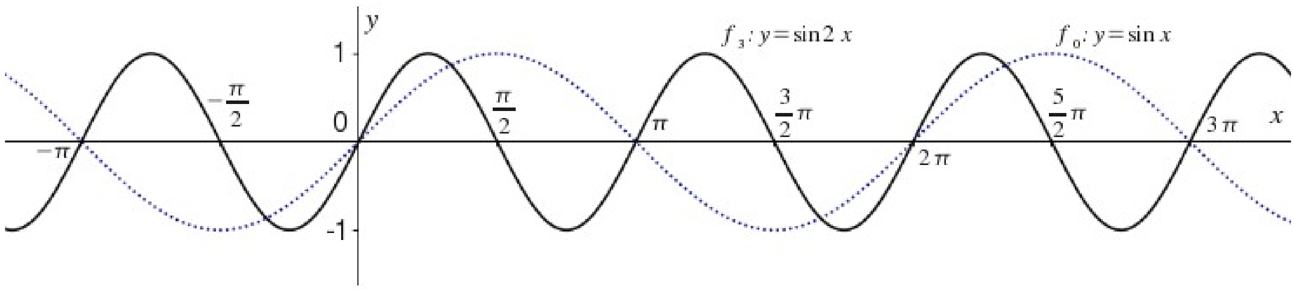
Chceme – li získat stejnou hodnotu 1 u funkce $f_3: y = \sin 2x$, je potřeba za x dosadit ...., protože

....

Podobně je tomu s průsečíky s osou x. Funkce $f_0: y = \sin x$ nabývá hodnoty 0 v bodě π ,

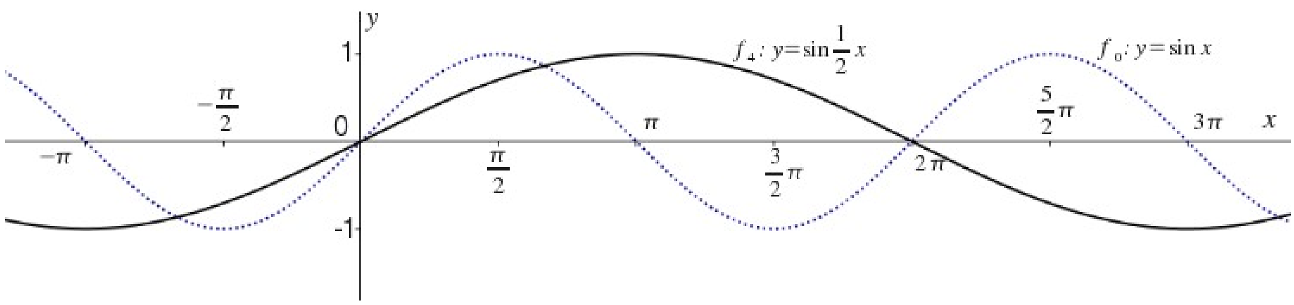
zatímco funkce $f_3: y = \sin 2x$ již v bodě ....

U všech bodů funkce $f_3: y = \sin 2x$ tak dochází oproti funkci $f_0: y = \sin x$ k posunu do poloviční vzdálenosti k ose y a tedy ke zhuštění grafu na poloviční periodu.



4. Graf funkce $f_4: y = \sin \frac{1}{2} x$

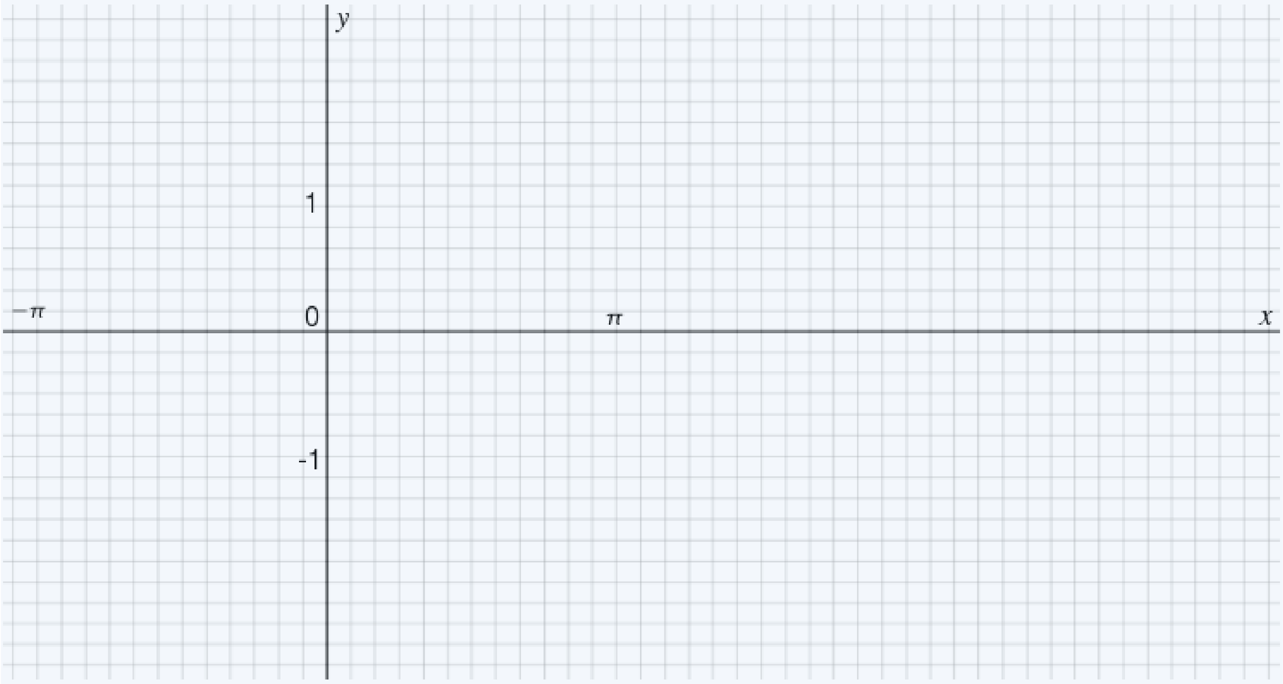
Díky obdobné úvaze jako u předchozího grafu dojdeme k závěru, že graf funkce $f_4: y = \sin \frac{1}{2} x$ je oproti grafu grafu funkce $f_0: y = \sin x$ roztažen na dvojnásobnou periodu.



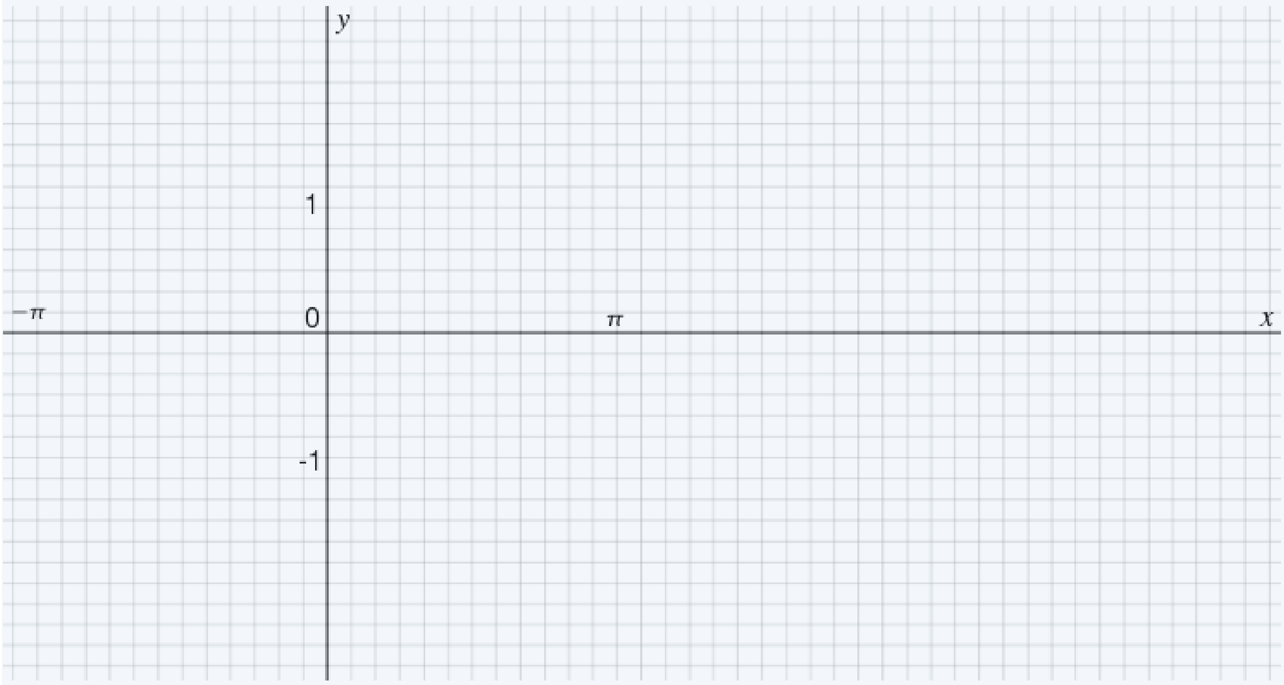
Př.2 Sestrojte grafy funkcí

a) $f: y=\sin(2x+\pi)-1$ b) $g: y=|2\cos x|$ c) $h: y=-\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}$

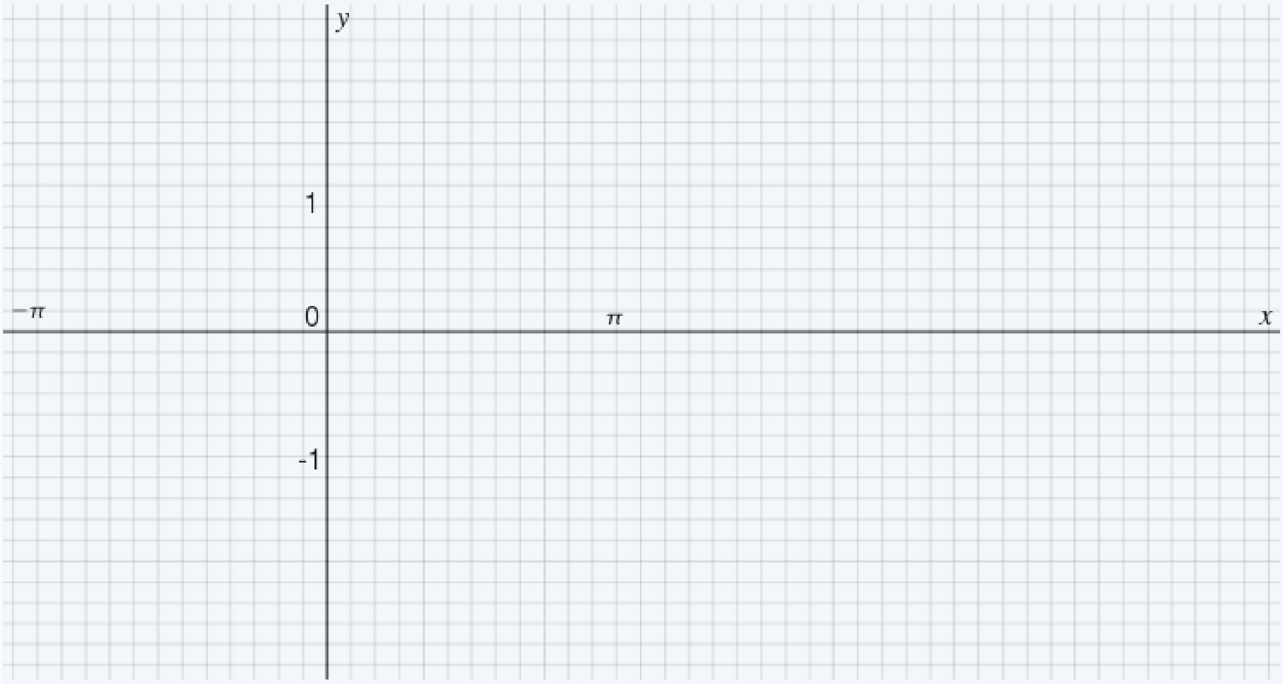
a)



b)



c)



V dalším příkladu si ukážeme několik obtížnějších transformací. Z časových důvodů u daných funkcí nebudeme sestrojovat grafy, ale pouze vypíšeme kroky vedoucí k jejich sestrojení.

Př.3 Popište způsob sestrojení grafů následujících funkcí.

a) $f: y = 1 - |\sin 2x|$ b) $g: y = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ c) $h: y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Díky tomu, že goniometrické funkce jsou periodické, mohou dvě různé transformace vést ke stejnému výsledku. O tom, zda k tomu dojde budete mít za úkol rozhodnout v následujícím příkladu.

Př.4 Rozhodněte, které z uvedených dvojic funkcí mají stejné grafy:

a) $y=\sin(-x)$ a $y=-\sin x$

b) $y=\cos(-x)$ a $y=-\cos x$

c) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ a $y=-\cos x$

d) $y=|\mathrm{tg}\, x|$ a $y=\left|\mathrm{cotg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$

Podobných rovností bychom přitom jistě našli více. Nejdůležitější z nich bychom mohli chápat jako další vztahy pro práci s goniometrickými funkcemi a spolu s dříve uvedenými G1,G2 a G3 je pak využívat v řadě úloh. Jistě pro vás nebude problémem v následující větě pravé strany vztahů doplnit.

Pro každé reálné číslo *x* (úhel *x*) platí:

G4

$\sin(-x)=$

$\cos(-x)=$

$\mathrm{tg}(-x)=$ pro $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;k\in Z$

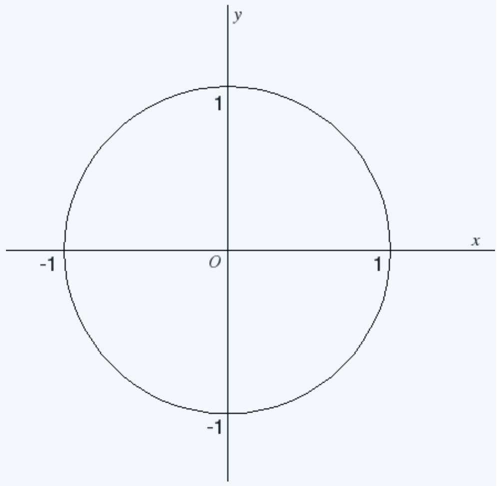
$\mathrm{cotg}(-x)=$ pro $x\neq k\pi\,;k\in Z$

G5

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=$

$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=$

Př.5 Vypočtěte bez pomoci kalkulačky $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=$



Př.6 Navrhněte co nejjednodušší způsob sestrojení grafu funkce $f: y = 1 - \frac{1}{\mathrm{tg}(-x)}$.