Materiál byl vytvořen v rámci projektu
Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GONIOMETRICKÉ ROVNICE

Základní goniometrické rovnice

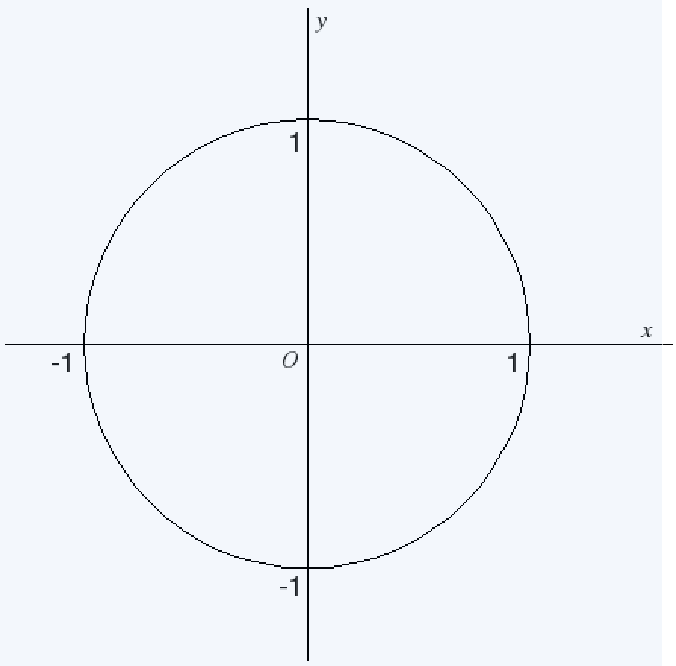
Mezi základní goniometrické rovnice bychom mohli zařadit rovnice tvaru $\sin x = a\,;\cos x = a\,;\operatorname{tg} x = a\,;\operatorname{cotg} x = a$, kde *a* je libovolné číslo. Příkladem základní goniometrické rovnice může být tedy: Řešte rovnici $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Doposud jsme byli zvyklí určovat hodnoty goniometrických funkcí pro zadané úhly. Nyní je situace opačná – naším úkolem je najít takový úhel (číslo), jehož sinus bude vycházet $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tato hodnota je vám jistě povědomá a je zřejmé, že odpovědí bude některý z tabulkových úhlů uvedených v předchozích kapitolách. K jeho nalezení budeme moci použít například jednotkovou kružnici. Před zápisem výsledku si ale musíme uvědomit, že na množině reálných čísel má uvedená rovnice nekonečně mnoho řešení (pokud bychom totiž jako jedno z řešení našli např. úhel 10^0 , bude dalším řešením úhel 370^0 atd.). Goniometrické funkce jsou totiž periodické a jejich hodnoty se pravidelně opakují. Většinou proto postupujeme tak, že nejprve nalezneme všechna řešení v rozmezí $0^0 - 360^0$ tzn. v intervalu $\langle 0\; 2\pi)$ a za ně připíšeme příslušnou periodu. Pokud číslo *a* v zadání rovnice nebude tabulkové, použijeme k nalezení řešení místo jednotkové kružnice kalkulačku a dále postupujeme stejně.
Na dalčích příkladech si ukážeme řešení některých základních goniometrických rovnic.

Př.1 Řešte v *R*

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \frac{1}{2}$ c) $\sin x = 0{,}2$

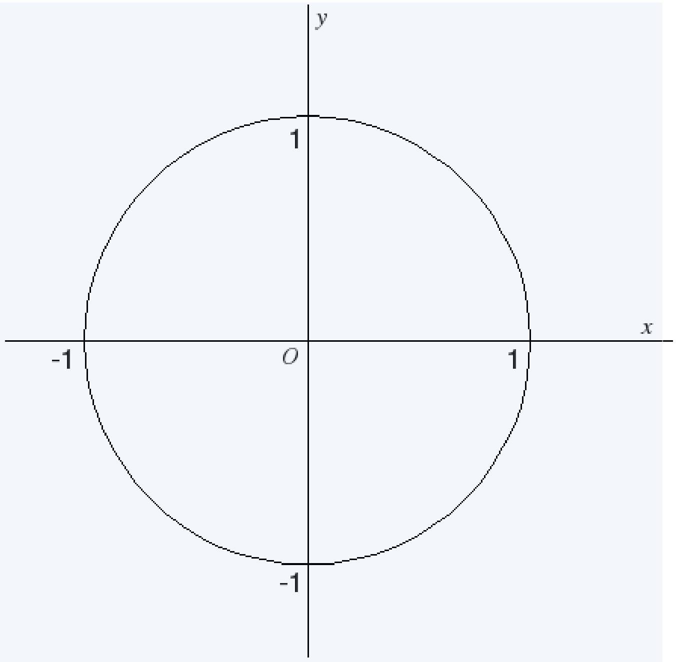
d) $\cos x = 2{,}5$ e) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\operatorname{cotg} x = 1{,}4$.

a)



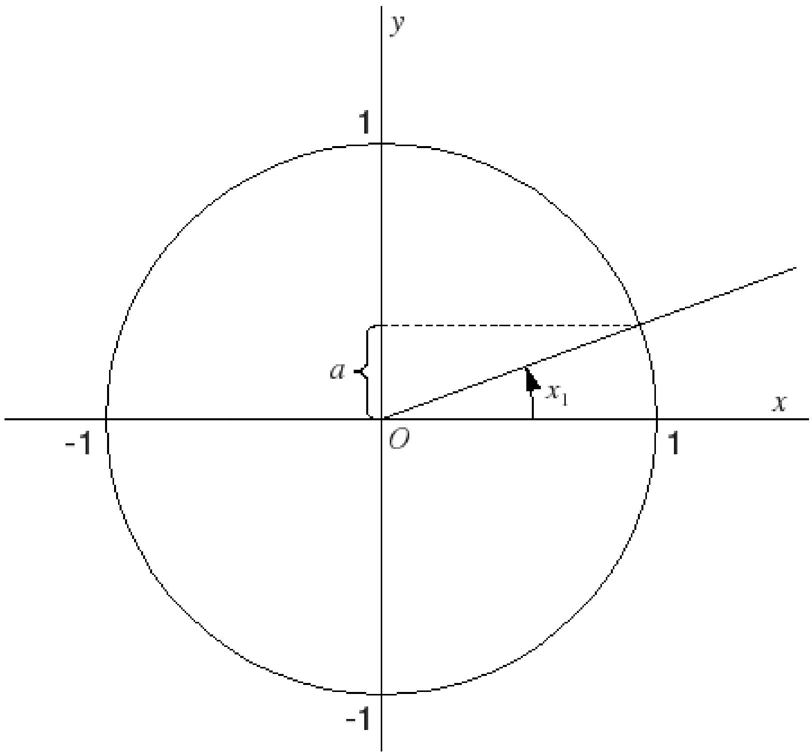
Pokud jste řešení úplně nepochopili, můžete si je prohlédnout znovu zde.

b)

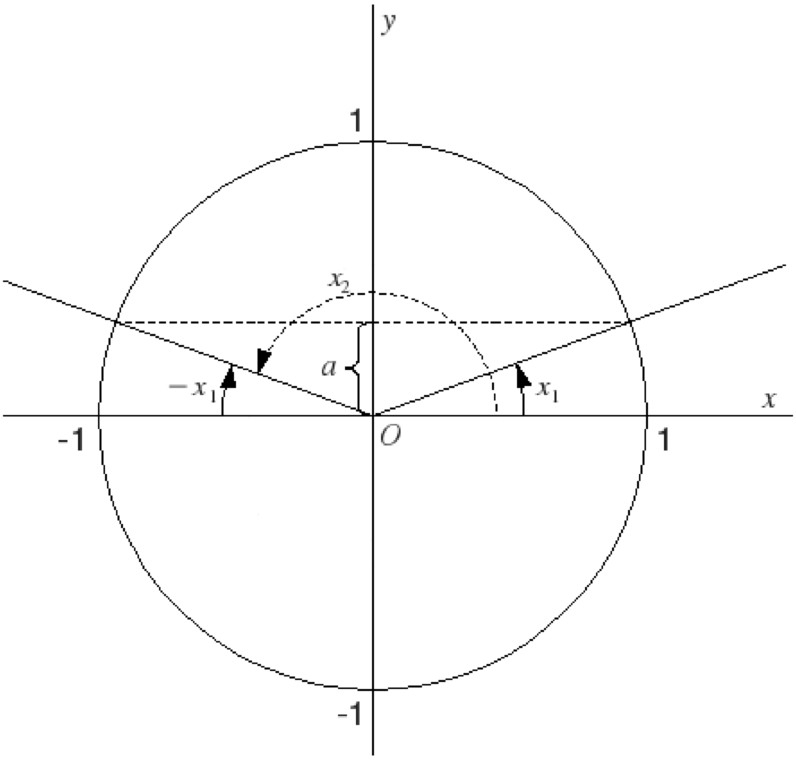


Z předchozích dvou příkladů je patrné, že rovnice $\sin x = a$, resp. $\cos x = a$ mohou mít v intervalu $< 0\ 2\pi)$ dvě řešení. Najdeme – li přitom jedno z nich, pak ze souměrnosti s osou y resp. s osou x lze druhé snadno dopočítat.

Situaci si nejprve ukážeme pro rovnici $\sin x = a$. Na obrázku je znázorněno jedno její řešení x_1.



Na dalším obrázku je přidáno druhé řešení.

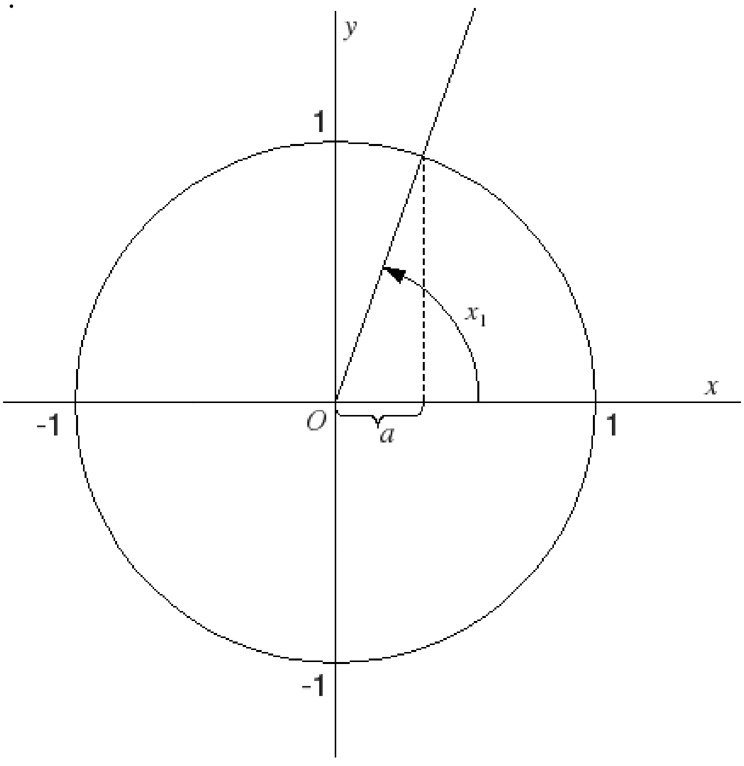


Jestliže využijeme souměrnosti podle osy y, můžeme říct, že má – li rovnice $\sin x = a$ v intervalu $< 0\ 2\pi)$ jedno řešení x_1, pak druhé řešení lze dopočítat podle vztahu

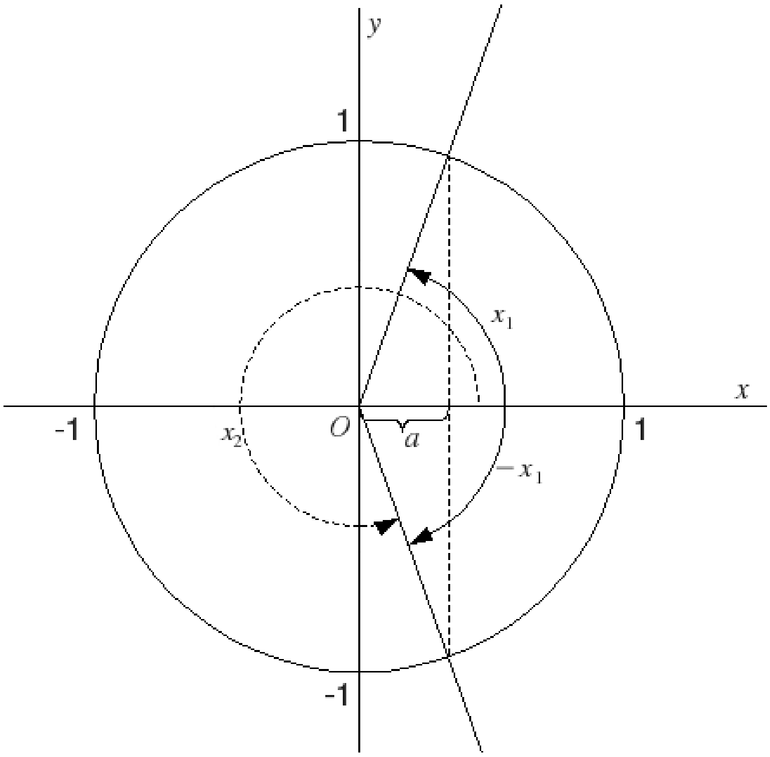
$$x_2 =$$

V dynamické podobě si můžete situaci prohlédnout zde.

Dále se budeme věnovat rovnici rovnici $\cos x = a$. Na prvním obrázku je opět znázorněno jedno její řešení x_1.



Na dalším obrázku je přidáno druhé řešení.

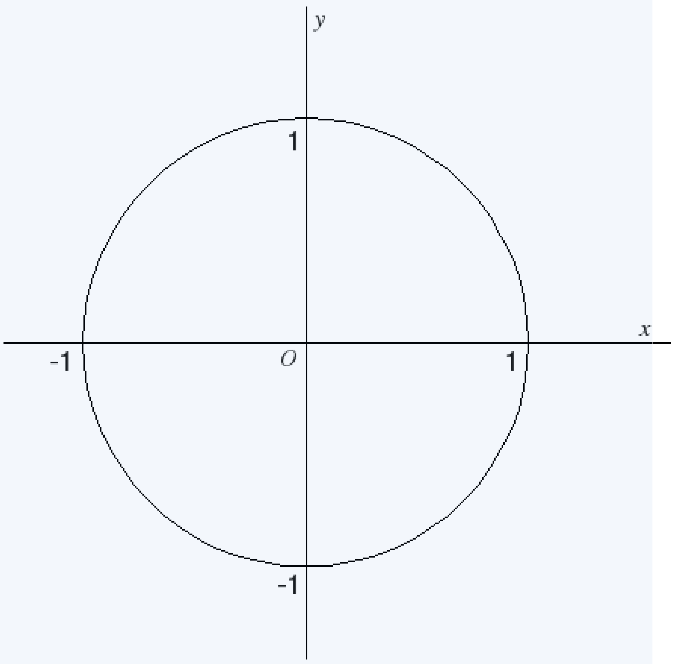


Jestliže tentokrát využijeme souměrnosti podle osy x, můžeme říct, že má – li rovnice $\cos x = a$ v intervalu $<0\ 2\pi)$ jedno řešení x_1, pak druhé řešení lze dopočítat podle vztahu

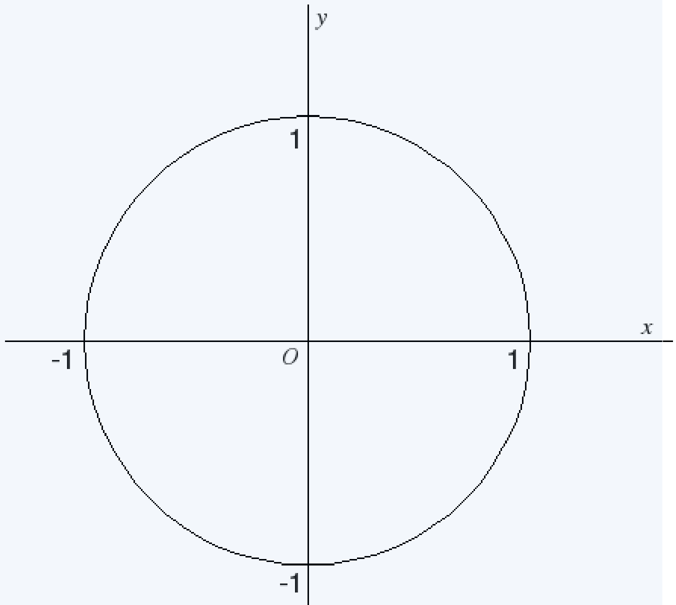
$$x_2 =$$

V dynamické podobě si můžete situaci prohlédnout zde.
Tyto skutečnosti pak využijeme zejména v případech, kdy k řešení používáme kalkulačku, která je schopna poskytnout řešení pouze jedno.

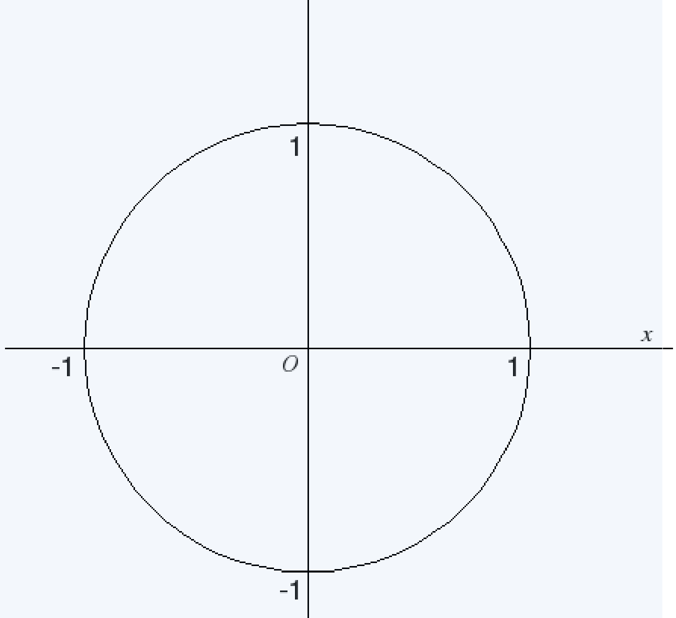
c)



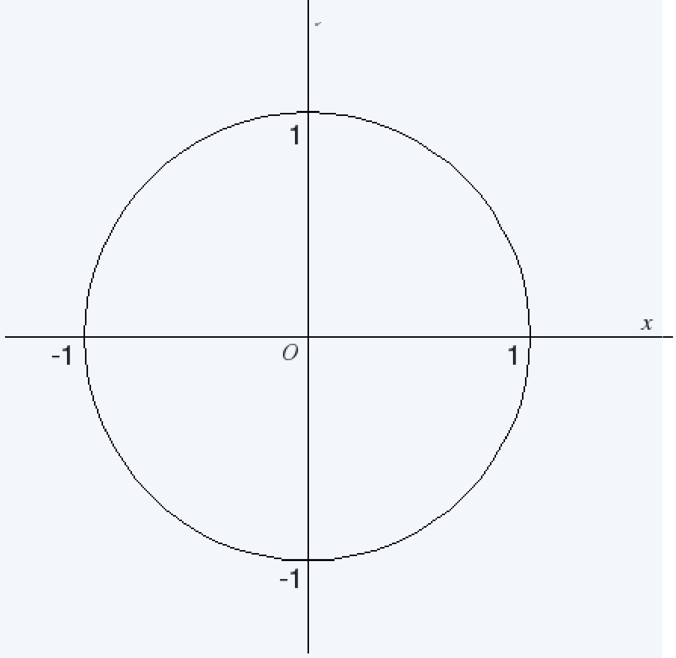
d)



e)

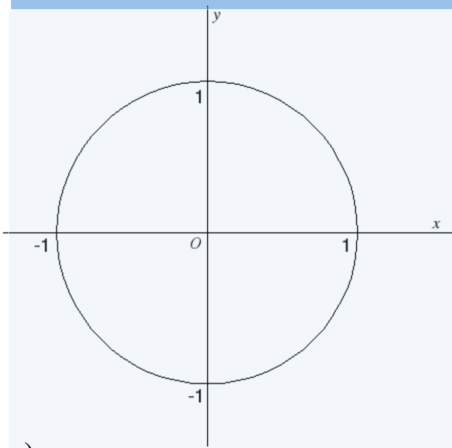


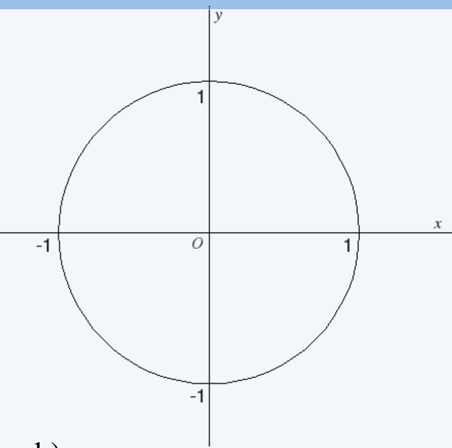
f)

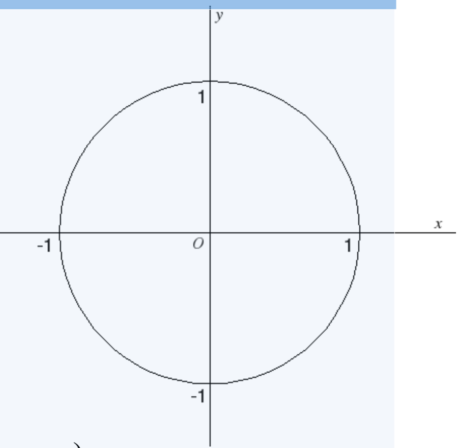


Nestandardní situace vznikají při řešení základních goniometrických rovnic pro $a = 0 ; \pm 1$. Některé z nich ukázkově vyřešíme v dalším příkladu.

Př.2 Řešte v R a) $\sin x = -1$ b) $\cos x = 0$ c) $\mathrm{tg}\, x = 0$







a)

b)

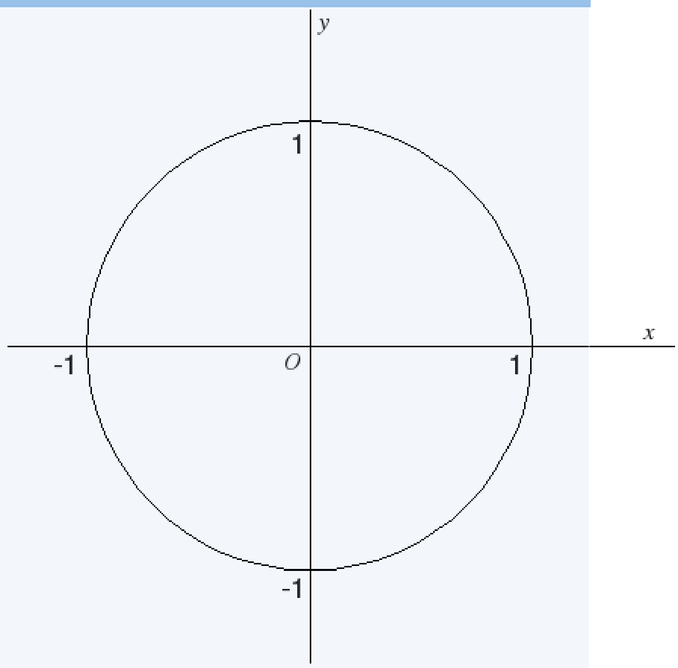
c)

Další goniometrické rovnice

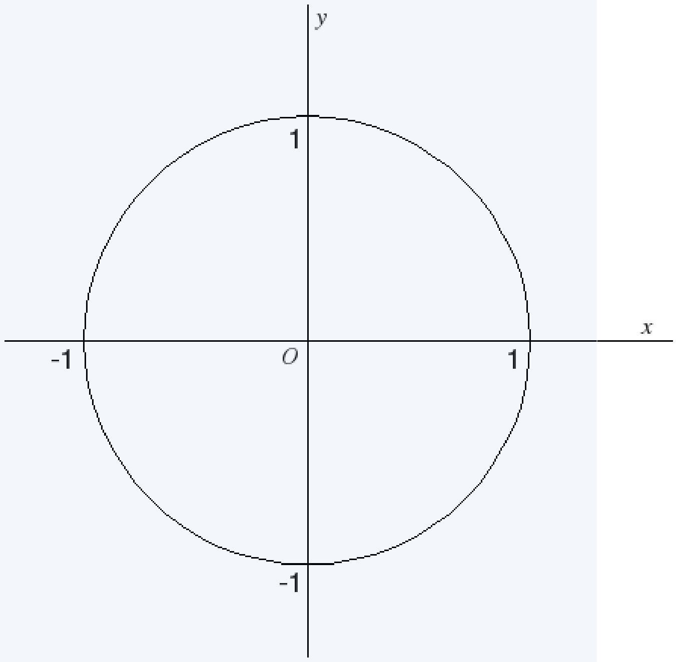
Na závěr kapitoly si ukážeme několik složitějších goniometrických rovnic. Při jejich řešení používáme nejčastěji substituci nebo rozklad na součin s anulovanou pravou stranou. Cílem je přitom získat základní goniometrické rovnice, které již řešit umíme.

Př.3 Řešte v R a) $\frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{10}$ b) $\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -1$

a)

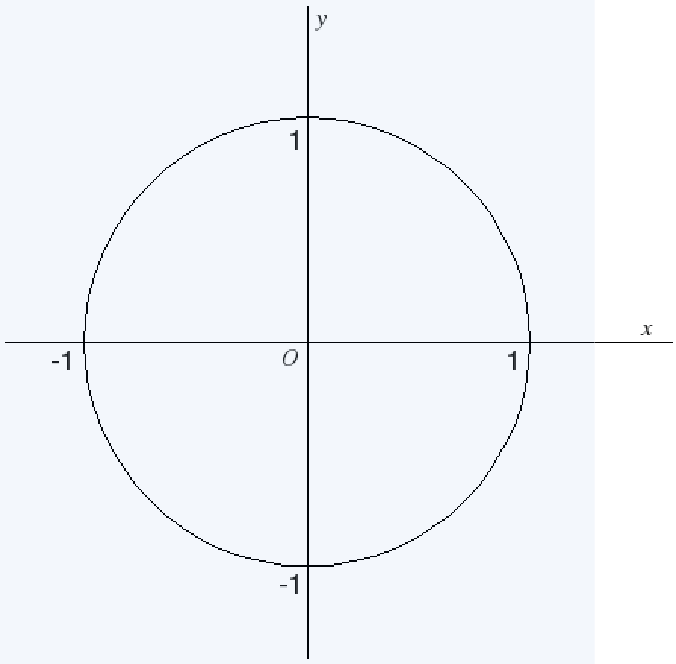


b)

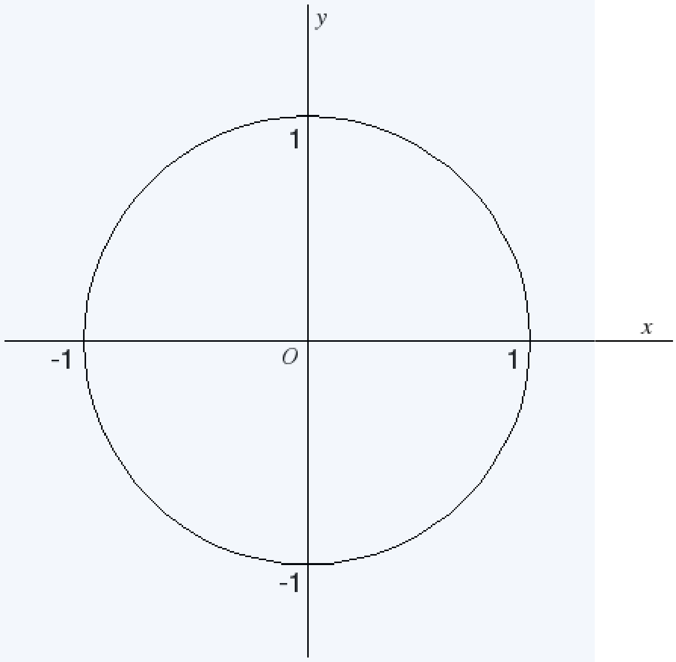


Př.4 Řešte v R a) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$ b) $2 + \cos 2x = -5 \sin x$

a)

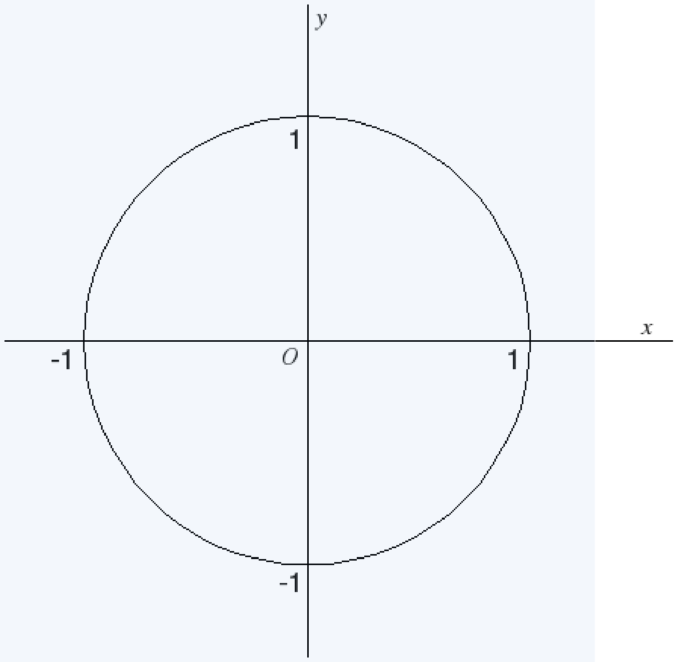


b)



Př.5 Řešte v R a) $\frac{\text{tg}\, x}{2} = \sin x$ b) $\text{tg}\, x + \frac{\cos x}{1+\sin x} = 2$

a)



b)