Materiál byl vytvořen v rámci projektu
Nové výzvy, nové příležitosti, nová škola

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

ŘEŠENÍ OBECNÉHO TROJÚHELNÍKU

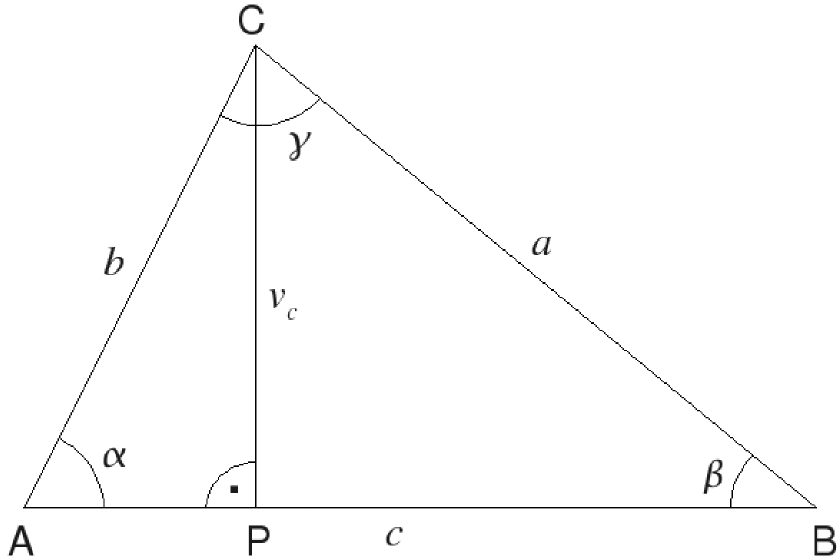
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
PrimMat Soukromá střední škola podnikatelská, s. r. o.
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ŘEŠENÍ OBECNÉHO TROJÚHELNÍKU

Dosavadní znalosti z trigonometrie nám umožňovaly řešit pouze trojúhelník pravoúhlý. K tomu jsme používali zejména Pythagorovu větu, Euklidovy věty, věty o podobnosti trojúhelníků a goniometrické funkce. Úkolem této kapitoly je rozšířit naše dovednosti na řešení trojúhelníku obecného. Hlavními nástroji, které při tom budeme využívat budou sinová a kosinová věta.

Sinová věta

Ukážeme si nejprve odvození sinové věty. Mějme obecný trojúhelník *ABC* s vnitřními úhly α, β, γ, ve kterém sestrojíme výšku v_c. Patu výšky označíme *P*, čímž získáme dva pravoúhlé trojúhelníky *APC* a *PBC*.



V trojúhelníku *APC* vyjádříme sinus úhlu α a v trojúhelníku *PBC* sinus úhlu β :

$\sin\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\sin\beta =$

Z obou vztahů vyjádříme v_c :

$v_c =$ $\qquad\qquad$ $v_c =$

Porovnáním pravých stran pak dostaneme:

.... , což lze přepsat na

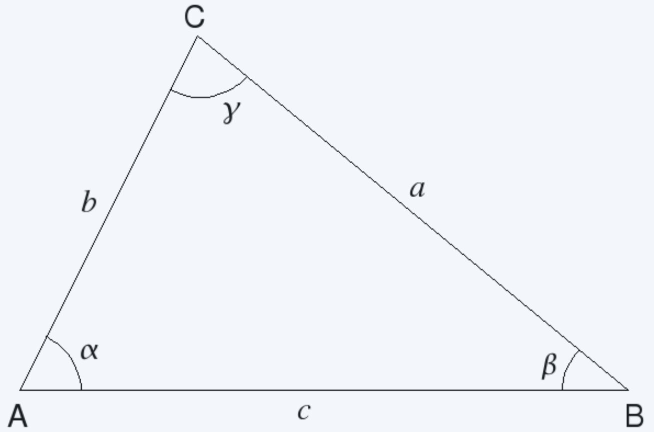
....

Právě odvozený vztah je částí tzv. sinové věty. Kdybychom přitom místo výšky v_c použili výšku v_a nebo v_b , dostali bychom další dvě obdobné rovnosti. Můžeme tedy formulovat sinovou větu.

Sinová věta: V každém trojúhelníku ABC s délkami stran a, b, c a velikostmi vnitřních úhlů α, β, γ platí:

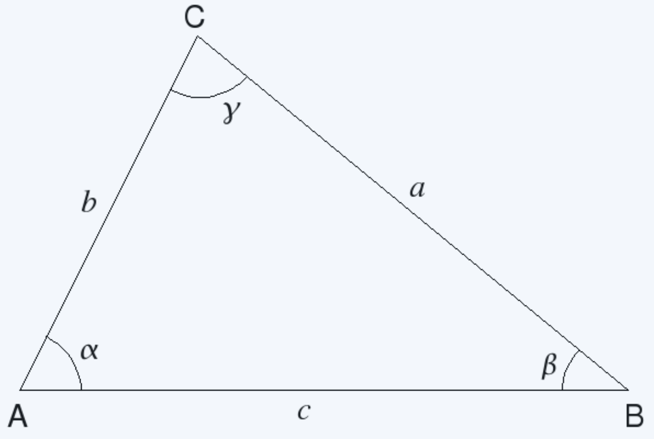
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \quad .$$

Př.1 Řešte obecný trojúhelník ABC, je – li dáno $\beta=0{,}845\,;\gamma=0{,}689\,;a=5{,}24\,cm$.



Zápis:

Př.2 Řešte obecný trojúhelník ABC a určete jeho obsah, je – li dáno $\alpha=72^0\,10^{\prime}\,;a=10{,}82\,cm\,;c=8{,}54\,cm$.



Zápis:

Jak můžeme vidět, vzniká u tohoto typu zadání problém s počtem řešení. Abychom se v situaci lépe zorientovali, prohlédněme si grafickou konstrukci takového trojúhelníku. Pokud úlohu řešíme početně, jako v našem případě, je možné jedno z řešení vyloučit v případě, že je porušena jedna z následujících podmínek:

1. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než 180^0 .
2. Proti větší straně je větší úhel.

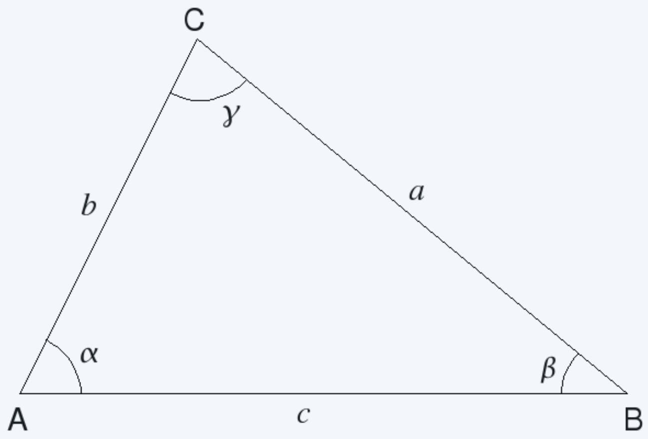
Sinovou větu můžeme použít k řešení trojúhelníku, pokud známe stranu a protilehlý úhel. V ostatních případech využíváme větu kosinovou, která je vlastně zobecněním Pythagorovy věty pro obecný trojúhelník. Tu z časových důvodů uvedeme bez důkazu.

Kosinová věta

V každém trojúhelníku ABC s délkami stran a, b, c a velikostmi vnitřních úhlů α, β, γ platí:

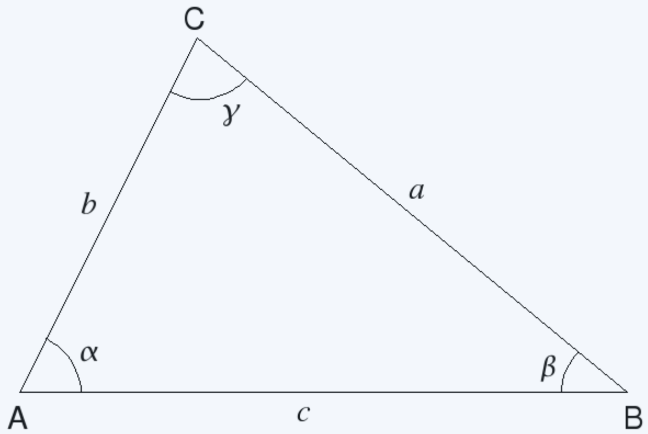
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 =$$
$$c^2 =$$

Př.3 Řešte obecný trojúhelník ABC, je – li dáno.



Zápis:

Př.4 Vypočtěte vnitřní úhly v trojúhelníku ABC s délkami stran $a = 6{,}9\ mm\,;\ a = 4{,}3\ mm\ cm\,;\ c = 3{,}1\ mm$.

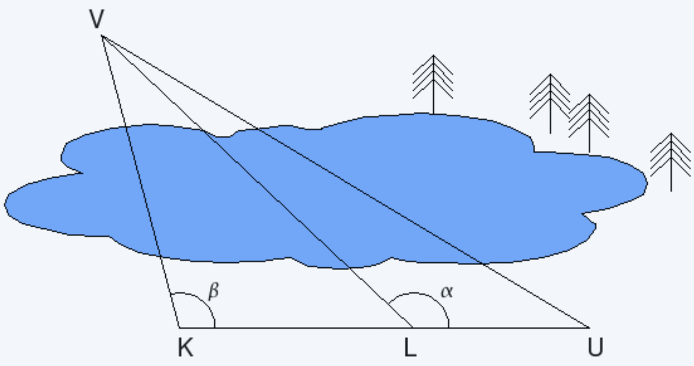


Zápis:

Slovní úlohy

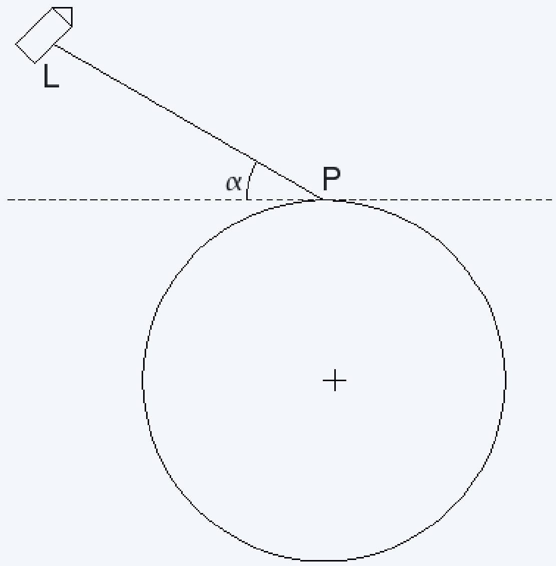
Řešení obecného trojúhelníku nachází široké využití v praxi a to zejména v tzv. triangulaci. Jde o způsob výpočtu souřadnic a vzdáleností pomocí pomyslného trojúhelníku. Triangulace nachází využití například v geodezii, navigaci, řízení plavby apod. V praktické geodezii využíváme v krajině vytvořenou síť triangulačních bodů. Zaměření úhlu se pak provádí přístrojem zvaným teodolit. V rámci učiva matematiky si ukážeme několik příkladů praktického využití sinové a kosinové věty.

Př.5 V krajině se můžeme setkat se situací, že potřebujeme změřit vzdálenost dvou nepřístupných míst. V našem případě jsou místa U a V oddělena vodní plochou. Můžeme se však pohybovat po břehu do míst L a K a přitom měřit vzdálenost a úhel. Určete vzdálenost bodů U,V, jestliže bylo naměřeno $\alpha=115^0 30' ; \beta=104^0 20' ; |UK|=110\,m ; |KL|=65\,m$.



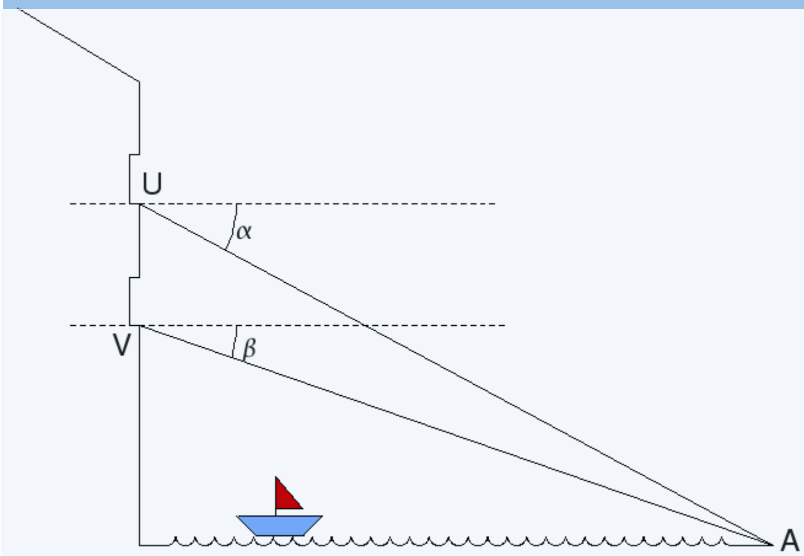
Zápis:

Př.6 Pozorovatel na povrchu Země vidí v určitém okamžiku kosmickou loď pod úhlem $\alpha=23^0 10'$ nad obzorem ve vzdálenosti 592 *km*. V jaké výšce nad zemským povrchem je loď?



Zápis:

Př.7 Dům stojí na břehu řeky. Ze dvou oken v různých poschodích, jejichž výškový rozdíl je 8,8 *m*, vidíme stejný bod *A* na druhém břehu postupně pod hloubkovými úhly $\alpha = 12^0 50' ; \beta = 6^0 10'$. Jaká je šířka řeky?



Zápis: